

Dr. Jörg Kwapis

Rechenschwächen als Produkt mathematischen Anfangsunterrichtes

Vortrag auf der Jahrestagung 2007 der Deutschen Gesellschaft für

Mathematikdidaktik (27.03.2007, Humboldt-Universität Berlin; überarbeitete Fassung: Juni 2011)

Mein Vortrag wird sich damit befassen, wie und warum sich Rechenschwächen im mathematischen Anfangsunterricht bedingt durch die schulische Organisation des Mathematiklernens und durch Kompetenzmängel der Lehrenden generieren.

Was sind Rechenschwächen? Was ist Rechnen?

Zunächst bedarf es einer Klärung dessen, was mit Rechenschwächen gemeint ist. Als Rechenschwäche werden zahlenmathematische Wissensdefizite begriffen, deren typische Erscheinungsformen sich durch drei wesentliche Aspekte charakterisieren lassen:

- a) kein bzw. ein mangelhaftes Wissen über die elementare Arithmetik,
- b) Ergebnisse werden ohne sachlogische Einsichten über Ersatzformen des Rechnens generiert,
- c) psychische und soziale Auswirkungen wirken als Verstärker der Wissensdefizite

Kein bzw. mangelhaftes Wissen über die elementare Arithmetik

Rechenschwäche (synonym Dyskalkulie, Arithmasthenie) zeichnet sich zunächst dadurch aus, dass die elementare zahlenmathematische Logik, die einen suffizienten Umgang mit Mengen und Zahlen ermöglicht, gänzlich unverstanden, nur in Bruchstücken oder falsch verstanden ist. Vorausgesetzt, dass die Zuordnung Zahlname / Zahlsymbol / Anzahl gelingt, liegt das Problem bei Rechenschwäche darin, dass Zahlen nicht bzw. nicht systematisch in ihren abstrakten Wertigkeiten und mithin nicht in ihren abstrakten Wertigkeitsbeziehungen verstanden werden. Es fehlt das kardinale und relationale Zahlwissen. Zahlen werden von Rechenschwachen nicht als abstrakte Gesamtheiten begriffen, die sich aus abstrakten Einheiten generieren und die sich umgekehrt in Einheiten bzw. andere Gesamtheiten zerlegen lassen. Zahlen werden damit nicht in ihren abstrakten Mengenstrukturen begriffen.

Das Wissen der Rechenoperationen baut auf dem mengenstrukturellen Wissen über Zahlen auf. Liegt dieses Wissen nicht oder nur bruchstückhaft vor, können die Rechenoperationen ebenfalls nicht oder nur fragmentarisch verstanden werden.

Rechenschwäche wird als sachlogisches Wissensdefizit der Arithmetik begriffen. Damit erfolgt eine Abgrenzung sowohl zum medizinisch-neuropsychologischen Verständnis der so genannten "Rechenstörung" wie sie in der ICD-10, F81.2 klassifiziert ist wie auch zu Annahmen, dass Rechenschwächen generell auf gestörte und mangelnde basale kognitive Funktionen zurückzuführen sind. Die Kritik der Diskrepanzkriterien der ICD-10 ergibt sich daraus, dass diesen Kriterien sachlogische Bezüge fremd sind. Es muss die Diskrepanz des allgemeinen Intelligenzniveaus des Probanden zum Durchschnittswert sowie die Diskrepanz zu den rechnerischen Leistungen der Altersgruppe nachgewiesen werden. Beiden Aspekten mangelt es an Fragen zum sachlogischen arithmetischen Wissen des Probanden. Aus lerntheoretischer Sicht geht die Klassifizierung nach ICD-10 am Problem von Rechenschwachen vorbei. Für die weitere Kritik des medizinisch-neuropsychologischen Konzeptes der Teilleistungsstörung Rechenschwäche möchte ich der Kürze wegen auf Gerster¹ verweisen.

Ergebnisse werden ohne sachlogische Einsichten generiert

Rechenschwache fallen dadurch auf, dass sie trotz des mangelnden Wissens in der Sache dennoch Ergebnisse hervorbringen. Die Ergebnisse werden auf der Basis der subjektiven (fehlerhaften) Logik und mit Hilfe von Ersatzformen des Rechnens hervorgebracht. Diese Ersatzformen des Rechnens sind das Zählen, das Raten, das Auswendiglernen und das Abarbeiten von unverstanden antrainierten Algorithmen. Das Ausrechnen ohne Sachwissen ist das Produkt des schulischen und des sozialen Zwanges: es müssen Ergebnisse zu Bewertungszwecken hervorgebracht werden, wobei das individuelle Wissen eben nicht als notwendige Voraussetzung für die Aufgabenbearbeitung begriffen wird.

Es gibt eine Biografie des Rechenschwachen entlang seiner Ersatzformen des Rechnens. Die typische Ersatzform des Anfangsunterrichtes ist das Zählen - flankiert

¹ Gerster, Hans-Dieter: Ist Rechenschwäche eine Teilleistungsstörung? in: Kopf und Zahl – Zeitschrift des Vereins für Lerntherapie und Dyskalkulie e.V., 4. Auflage 2005, S. 3

vom Raten und dem Auswendiglernen von Aufgabensätzen und Regeln. Mit der Einführung der so genannten schriftlichen Rechenverfahren bekommt dann der Zähler Algorithmen an die Hand, mit deren schematischer Anwendung er richtige Ergebnisse hervorbringen kann. Folglich werden die Verfahren trainiert, ohne dass Einsichten in deren sachlogische Begründung vorliegen. Es kommt zu unbemerkten, fehlerhaften und alogischen Abwandlungen der Verfahren. Der Typus des begriffslosen Mechanikers rechnet mit seinen unverstanden antrainierten und teilweise fehlerhaft abgewandelten Verfahren alles aus, ohne die Inhalte des Ausgerechneten zu verstehen.

Psychische und soziale Auswirkungen

Unsere Alltagskultur sowie die berufliche Praxis sind durch den Umgang mit Mengen und Zahlen geprägt. Mathematik ist eines der schulischen Hauptfächer. Aus dieser Situation resultiert bei einem gleichzeitig mangelnden oder problematischen elementar-arithmetischem Wissen Druck auf den Rechenschwachen. Bei Schulkindern wirkt sich dies zumeist in einer zunehmend angespannten Situation des Übens zu Hause, im schulischen Förderunterricht und in der außerschulischen Nachhilfe aus. Da hier der individuelle mathematische Lernstand nicht berücksichtigt wird und letztlich das Unverstandene eingeübt wird, stehen im Ergebnis der Rechenübungen keine sachlogischen Erkenntnisse, sondern neben und aus dem verständnislosen Auswendiglernen von Rechenwegen entstehen psychische und seelische Belastungssituationen, die durch Versagensängste, Vermeidungshaltungen und negative Selbstkonzepte geprägt sind. Die Folge kann eine Mathematikunlust sein, die sich bis hin zu einer allgemeinen Schulunlust und bis zur Schulverweigerung auswirken kann. In der Folge des "bloß" mathematischen Wissensproblems finden sich neben den psychosozialen Auswirkungen (zum Teil erheblich) geminderte Chancen einer erfolgreichen beruflichen Ausbildung und Integration.

Rechenschwächen ergeben sich aus der Abgrenzung zu dem, was das Rechnen ist. Mit Rechnen wird eine Fertigkeit bezeichnet,
__die auf dem Wissen in die abstrakten Wertigkeiten von Zahlen und in die relationalen und operationalen Strukturen der Arithmetik basiert,
__die auf eine Bewusstheit über die Systematik der elementaren Arithmetik aufbaut und
__die diese Einsichten und dieses Wissen zur Lösung quantitativer Fragen nutzt.

Auf dem Weg zu diesem Wissen können Schwierigkeiten bei der Erarbeitung der logischen Einsichten, die deren Verständnis ganz oder teilweise verhindern, auftreten und die ein falsches Verständnis von Zahlen und Operationen befördern. Da das mangelnde oder mangelhafte Wissen der mathematischen Logik auf keiner Absenz des Denkens beruht, sondern stattdessen an Stelle des korrekten Verständnisses eine subjektive Interpretation der Sache, also ein falscher Gedanke des Lernenden steht, können Rechenschwächen in verschiedenen individuellen Ausprägungen und Typen sowie mit einer Bandbreite von Phänomenen verbunden auftreten. Mit Rechenschwächen werden folglich zahlenmathematische Wissensdefizite unterschiedlichen Grades beschrieben, die sich phänomenologisch in verschiedene Typen differenzieren lassen. Rechenschwächen werden hier als mathematische Wissensdefizite mit typischen Erscheinungsformen, mit typischen Denkweisen und Lösungsprozessen, deren Analyse den Stand des mathematischen Wissens offen legt, begriffen.

Rechenschwächen generieren sich im schulischen Anfangsunterricht Mathematik.

Im Anfangsunterricht Mathematik sollen die grundlegenden Einsichten in die Arithmetik erarbeitet werden. Scheitert dieser Lernprozess ganz oder teilweise, entstehen Wissensdefizite verschiedenen Ausmaßes, die jedoch alle den zahlenmathematischen Elementarbereich betreffen. Hinweise auf die Genese von Rechenschwächen im mathematischen Anfangsunterricht ergeben sich aus einer lösungsprozessanalytischen Untersuchung des individuellen mathematischen Lernstandes. Vielfach verweist schon das Zählen, ob als alleiniges Verfahren oder integriert in andere Ersatzformen des Rechnens auf den mathematischen

Anfangsunterricht. Das Zählen ist ein Lösungsverfahren aus dem frühen mathematischen Lernen. Bei einem erfolgreichen Lernprozess wird es vom Wissen um die abstrakten Zahlbedeutungen und Zahlrelationen abgelöst, auf das als automatisiertes Wissen rechenpraktisch zurückgegriffen werden kann. Liegt dieses Wissen nicht vor, bleibt das Zählen mangels Alternativen das bevorzugte Lösungsverfahren. Es wird für das eigentliche Rechnen gehalten und persistiert. Das Zählen als Lösungsverfahren verliert sich nicht, sondern wird in andere Ersatzformen des Rechnens implementiert.

Deutliche Hinweise darauf, dass sich Rechenschwächen im Anfangsunterricht Mathematik generieren, lassen sich der repräsentativen Schuluntersuchung von Jansen (2005) zum mathematischen Lernstand von Zweit- und Drittklässlern entnehmen. Nach Jansens Untersuchung verfügen Mitte der 2. Klasse 22% der Schüler nicht über die Wissensvoraussetzungen zum Wissen der nächsten Lernschritte². In der 2. Klasse sollen sich die Schüler einen verständigen Umgang mit den Zahlen bis 100 erarbeiten. Dies umfasst zumindest das Wissen um die Wertigkeiten der Zahlen, der Zahlrelationen, des Aufbaus zweistelliger Zahlen und der Wertigkeiten von Zehnern und Einern sowie die Kenntnis der Addition und der Subtraktion sowie deren logischen Zusammenhangs. Nach Jansens Untersuchung verfügt ein Fünftel der Schüler in der 2. Klasse nicht oder nur rudimentär über diese zum weiteren Lernen notwendigen elementaren arithmetischen Einsichten. Jansen stellte in seiner Untersuchung weiterhin fest, dass Mitte Klasse 3 ca. 40% der Schüler „die Lernvoraussetzungen für das Rechnen im Tausenderraum fehlen, wenn dies in der Schule ansteht“.³

Internationale Vergleichsuntersuchungen wie PISA 2003 und IGLU-E bestätigen diese Befunde. Bei einem Fünftel bis einem Viertel der Kinder liegen Wissensdefizite unterschiedlicher Ausprägung vor, deren Inhalte aber immer den elementaren

² „In der Mitte der zweiten Klasse, also dem Zeitpunkt, zu dem der Posttest 2 eingesetzt wurde, steht in der Schule das Erlernen der Reihen des Einmaleins an. ... ist zu entnehmen, dass 22 Prozent aller Kinder nur 7 Aufgaben oder weniger lösten. Das bedeutet, dass jedes fünfte Kind nicht über die Lernvoraussetzungen verfügt, die zum Erlernen des Einmaleins benötigt werden, wenn in der Schule mit entsprechenden Übungen begonnen wird.“ (Jansen 2005, 117)

³ „In der zweiten Hälfte der dritten Klasse wird üblicherweise im Zahlenraum bis 1000 gerechnet. So bot sich eine gute Gelegenheit, mit Hilfe des Posttest 3, der in der Mitte der dritten Klassen eingesetzt wird, die Lernvoraussetzungen zu überprüfen. ... ist zu entnehmen, dass 38,3 Prozent aller Kinder nur 11 oder weniger Aufgaben lösen konnten. Das heißt, 4 von 10 Kindern fehlen die Lernvoraussetzungen für das Rechnen im Tausenderraum, wenn dies in der Schule ansteht.“ (Jansen 2005, 118)

zahlenmathematischen Lernstoff betreffen. Das Erarbeiten des elementarmathematisches Wissens wie auch das Scheitern dieses Lernprozesses ist folglich im mathematischen Anfangsunterricht situiert.

Das Erlernen des Rechnens folgt einer Lernhierarchie, in der Wissensvoraussetzungen zum Verständnis des jeweils nächsten Lernschrittes erforderlich sind. Das dem neuen Lernstoff zu Grunde liegende Wissen muss zunächst erarbeitet sein, damit erfolgreich weitergelernt werden kann. Aus empirischen Untersuchungen ist die Bedeutung des vorschulischen Mengen- und Zahlvorwissens für das schulische Mathematiklernen bekannt. Nach Krajewski (2003) ist der Stand des Mengen- und Zahlvorwissens von Schulanfängern sowohl ein Prädikator für gute schulische Mathematikleistungen bis zum Ende der 2. Klasse wie auch für die Vorhersage von Rechenschwächen. Ihre Studie belegt die erhebliche Bedeutung des mathematischen Vorwissens von Schulanfängern und damit die Bedeutung der mathematischen Lernhierarchie. Salopp formuliert: wer früh ausgestiegen ist, schafft den späteren Einstieg nicht mehr.⁴

Die Wissensdefizite in der elementaren Arithmetik wachsen sich nicht aus. Die bei PISA festgestellten „Risikorechner“, das waren mehr als ein Fünftel der deutschen Fünfzehnjährigen, rechnen im untersten Kompetenzniveau. Die Untersuchungsergebnisse bestätigen, was sich aus der Sachlogik der Arithmetik ergibt. Das Wissen des Gedanken B setzt die Einsicht in den davor liegenden Gedanken A voraus. Das Erlernen des Rechnens folgt einer Lernhierarchie, deren Missachtung Wissensdefizite erzeugt, die kumulieren müssen.

⁴ „Das mengen- wie das zahlenbezogene Vorwissen konnten als spezifische Vorläuferfertigkeiten schulischer Mathematikleistungen identifiziert und in mehrfacher Hinsicht als solche nachgewiesen werden. Kinder, die im Kindergartenalter an den Aufgaben zum Mengen- und Zahlenvorwissen gescheitert waren, waren auch diejenigen, die später in der Schule Probleme im mathematischen Anfangsunterricht hatten und eine Rechenschwäche zeigten. Die Zahleninformationsverarbeitungsgeschwindigkeit stellte sich hingegen wie die Gedächtniskapazität und die Intelligenz als unspezifisches Vorhersagemerkmal heraus. ... Unterschiede in vorschulischen Fähigkeiten zur räumlichen Vorstellung und zur Konzentrationsfähigkeit sowie zum Sprachwissen zeigten über den Vorwissenseffekt hinaus keinen prädiktiven Wert für die schulischen Mathematikleistungen. ... Festgehalten werden kann an dieser Stelle nur, dass schon im letzten Kindergartenjahr große Unterschiede im Vorwissensniveau bestehen, die bedeutsam dafür sind, welche mathematischen Kompetenzen ein Kind in den ersten zwei Schuljahren zeigen wird. Da wiederum die mathematischen Leistungen der Grundschule zu einem erheblichen Teil für die mathematischen Leistungen in viel höheren Klassen verantwortlich sind, sollte man sich erst recht der Bedeutung dieses vorschulischen Vorwissens bewusst sein.“ (Krajewski 2003, 211-214)

Das Übergehen fehlender Wissensvoraussetzungen für den jeweils nächsten Lernschritt ist leider kein schulischer Einzelfall, sondern die schulische Normalität. Jansen spricht von einer „didaktogenen Epidemie“.⁵

Rechenschwächen werden durch die schulische Organisation des Mathematiklernens und durch Kompetenzmängel der Lehrenden produziert.

Wenn das mathematische Lernen einer Hierarchie folgt, müsste der jeweils nächste Lernschritt durch die Absicherung der Wissensvoraussetzungen zum Wissen des aufbauenden Lernstoffes vorbereitet werden. Wenn alle Schüler alles lernen sollen, müsste dies für jeden Schüler, also für alle gelten. Jeder Schüler müsste folglich über die Wissensvoraussetzungen für den jeweils nächsten Lernschritt verfügen.

Das schulische Lernen ist bekanntermaßen anders organisiert: es wird in Pensen und unter dem Druck der Bewertung individueller Leistungen gelehrt und gelernt. Beim Lernen in Pensen orientiert sich das Voranschreiten im Lernstoff nicht am individuellen Wissensstand aller Schüler, sondern an zeitlichen Vorgaben für die Erarbeitung der jeweiligen Lernstoffe. Die Rahmenlehrpläne definieren neben den zu erarbeitenden Inhalten auch die zeitlichen Eckdaten. Die frühe Selektion im Bildungssystem verstärkt die zeitlichen Zwänge. Dabei erfolgt eine Auswahl für höhere Bildungsgänge auf der Grundlage schulischer Benotungen. Das Notensystem provoziert eine instrumentelle Haltung gegenüber dem Lerngegenstand auf allen Seiten. „Hauptsache das Ergebnis stimmt!“ - damit die Note stimmt. Diese Haltung erzeugt ein noten- und performanceorientiertes und in dem Sinne verfahrenorientiertes Erlernen des Umgangs mit Zahlen. Es verhindert den Fokus auf das verständnisorientierte Erlernen der Mathematik.

Wird ohne systematisches inhaltliches Vorverständnis und mit einer Haltung, die vor allem korrekte Ergebnisse für gute Schulnoten im Blick hat, mathematischer Unterricht betrieben, resultiert daraus eine mathematische Unterrichtspraxis, die Methoden wie das Auswendiglernen von Regeln und Definitionen, das Verfahrenstraining, das Erlernen von „Eselsbrücken“ und Tricks sowie amathematische Erklärungen begünstigt, wenn nicht sogar präferiert. Auf ein systematisches Wissen über die Sache zielt dies nicht ab.

⁵ Jansen 2005, 183

Der Zweck von Schule besteht trotz des grundsätzlichen Festhaltens am Selektionsverfahren auch darin, die grundlegenden Fertigkeiten des Lesens, des Schreibens und des Rechnens zu erarbeiten. Ansonsten droht das, was derzeit allenthalben beklagt wird, nämlich der Mangel an qualifizierten Arbeitskräften. Es bedarf eines Mindestmaßes an gesellschaftlich verwertbaren Fertigkeiten. Diese soll Schule erbringen. Nach dem Pisa-Debakel bemüht man sich um Minderung der offensichtlichen Ineffizienz schulischer Bildung mittels verschiedener Instrumente. Nur gehen die Bemühungen am Problem vorbei, da das Problem der unverstandenen Mathematik aus den oben genannten Gründen des instrumentell organisierten Lernens nicht erkannt wird. Im Anfangsunterricht Mathematik erfolgt keine in den Unterricht implementierte und ihn damit systematisch begleitende Lernstandsanalyse. Es finden Lernzielkontrollen statt, die ergebnisorientiert und nicht analytisch ausgerichtet sind und bei deren Auswertung nicht fehleranalytisch vorgegangen wird. Ohne Fehleranalyse und bei einem Fokus auf korrekte Ergebnisse als Ziel des Mathematikunterrichtes fallen individuelle Brüche im sachlogischen Wissen nicht auf. Im Unterricht könnte, selbst wenn es gewollt wäre, folglich keine Rücksicht auf mögliche Wissensdefizite genommen werden. Fallen Probleme von Schülern im mathematischen Lernen auf, wird mit Förderunterricht reagiert. Dieser wiederholt den aktuellen Unterrichtsstoff. Wissensdefizite, die in der mathematischen Lernhierarchie dem aktuellen Unterrichtsstoff voraus liegen, werden allenfalls zufällig erkannt und in der Regel nicht bearbeitet. Der Förderunterricht ist für Kinder mit Problemen im elementar-mathematischen Bereich sinnlos.

Werden anhaltende Wissensprobleme bei Schülern festgestellt, die zu erheblich abweichenden Leistungen im Vergleich mit den Mitschülern führen, erfolgt eine sonderpädagogische bzw. schulpsychologische Begutachtung. Per Definition durch die Schulbehörden, deren Ratgeber hier mathematikdidaktische Experten wie Prof. Schipper waren, erfolgt das Erfassen von Rechenschwächen im Sinne mathematischer Lernprobleme bspw. im Land Brandenburg erst ab dem Ende der 2. Klasse. Dies verhindert eine frühe Analyse des Problems und eine frühe Hilfe und befördert bei der vorliegenden Performanceorientierung des Mathematikunterrichtes die Professionalisierung von Ersatzformen des Rechnens bei rechenschwachen Kindern. Rechenschwache absolvieren dadurch den Mathematikunterricht häufig mit passablen Noten. Es fallen nur die Kinder mit erheblichen mathematischen

Lernproblemen auf. Damit schiebt sich ein erheblicher Anteil unverständiger Rechner als passable Könner durch die Grundschule.⁶

Der Anfangsunterricht Mathematik erfolgt nicht als mathematischer Fachunterricht. In der Lehrerausbildung für die Grundschule wird der Lerngegenstand Mathematik nicht genügend systematisch in seiner Logik, in seiner Spezifik und vor allem in seinen „Fallstricken“ erarbeitet. Das mangelnde Wissen in der Arithmetik wirkt sich nicht nur im Lehren des Gegenstandes aus, sondern ebenfalls bei der Analyse von mathematischen Wissensdefiziten aus. Dieser Mangel offenbart sich empirisch im Umgang mit Problemen beim Rechnenlernen. Bei offensichtlich systematischen Fehlern verweisen Lehrer auf das fehlende Üben oder darauf, dass die Grundaufgaben doch endlich gelernt werden sollten. Hinweise auf die biologische Lösung („Das wächst sich aus.“) sind ebenfalls nicht selten. Hilfen, die im Unterricht angeboten werden, bestehen häufig darin, dass der Schüler mit Veranschaulichungsmitteln rechnen darf. Sein Problem ist damit nicht gelöst. Im weiteren werden dann die schriftlichen Verfahren angeboten, wobei unreflektiert bleibt, dass diese bei einem Mangel der Wissensgrundlagen allenfalls als Verfahren auswendig antrainiert, aber nicht in deren Logik verstanden werden können. Das Arsenal an Kompensationstechniken des mathematischen Unwissens wächst weiter durch „Eselbrücken“ und Tricks. Es generieren sich subjektive Regelwerke, die aus unbegriffenen Regeln und unverstandenen Algorithmen bestehen.

Der Kompetenzmangel der Lehrenden in Verbindung mit der Performanceorientierung des Mathematikunterrichtes sowie das Fehlen einer förderdiagnostischen Begleitung des mathematischen Anfangsunterrichtes produzieren führen letztlich zum Scheitern der Schule an der Aufgabe eines erfolgreichen mathematischen Lernens.

Literatur

Jansen, Peter: Basiskurs Mathematik. Aktionsforschung zur Prävention und Überwindung der Rechenschwäche; Heinsberg 2005 (Dieck-Verlag)

Krajewski, Kristin: Vorhersage von Rechenschwäche in der Grundschule. Schriftenreihe: Studien zu Kindheits- und Jugendforschung. Band 29; Hamburg 2003 (Verlag Dr. Kovač)

⁶ Schon wegen der „Blindheit“ von Schule für die Kompensation mathematischer Wissenprobleme und dem „Durchrutschen“ rechenschwacher „Meisterrechner“ ist die Klassifizierung und Aufgabenteilung im Umgang mit mathematischen Lernproblemen, wie sie Schipper im SINUS-Programm (2005)vorschlägt, durch die gängige Schulpraxis ad absurdum geführt.