Zählen ist nicht rechnen

Oder: Warum zählen Kinder anstatt zu rechnen?

Jörg Kwapis

Was unterscheidet das Zählen vom Rechnen? Warum ist der Ausdruck „zählendes Rechnen“ ein Widerspruch in sich? Der Artikel beschreibt,auf welchem Wissen das Rechnen basiert. Zugleich wird aufgezeigt, welche Wissensdefizite zu Rechenersatzhandlungen wie dem Zählen führen.

Einleitung

Als eines der Hauptsymptome für Rechenschwächen wird das im mathematischen Lernprozess anhaltende Zählen beschrieben. Wer zählt, rechnet nicht. Oder anders formuliert: Wenn er rechnen könnte, würde er nicht zählen. Das Zählen ist nur *eine*, aber die rechenlernbiografisch früheste und die auffälligste Ersatzform des Rechnens. Fehlende rechnerische Kompetenzen können kompensatorisch noch anders ersetzt werden – durch Raten von Ergebnissen, durch bloßes Auswendiglernen von Aufgabensätzen oder durch ein schematisches Nutzen von unverstanden (an)trainierten Algorithmen. Um die Herausbildung von Rechenersatzformen wie das Zählen zu verstehen, müssen wir wissen, was die geistige Tätigkeit, die wir als Rechnen bezeichnen, ausmacht und durch welche Lernschritte diese Fertigkeit erarbeitet wird. Im Folgenden wird beschrieben, was das Rechnen vom Zählen unterscheidet. Dabei werden die lernhierarchisch aufeinander aufbauenden Inhalte der kardinalen Zahlenlogik beschrieben, auf deren Kenntnis das Rechnen basiert. Die Genese des Zählens als Rechenersatz beschreibt der darauf folgende Abschnitt. Die Aufgabe 8 – 7 begleitet diese Ausführungen als praktisches Beispiel. Abschließend wird aufgezeigt, wie wichtig eine lösungsprozess- und fehleranalytische Begleitung des Rechnenlernens ist und welche Hilfe dafür der Jenaer Rechentest als Analyseinstrument bietet.

Was ist Rechnen?

Mit Rechnen bezeichne ich das logische Verknüpfen der kardinalen Bedeutungen von Zahlen, um die durch das Rechenzeichen formulierte quantitative Fragestellung zu beantworten. Die Aufgabe 8 – 7 beinhaltet eine solche Fragestellung. In Worten ausgedrückt: Wie viele bleiben übrig, wenn sieben von acht weggenommen werden? Zur Beantwortung dieser Frage ist es nötig, die Inhalte der Zahlsymbole und des Rechenzeichens zu verstehen.

> Kardinaler Zahlbegriff: Wissen um die Wertbedeutungen und die Wertbeziehungen von Zahlen

Zahlen sind gedankliche Kategorien. Sie resultieren aus unserem Nachdenken über die Anzahleigenschaften von Mengen. Diese Anzahleigenschaft findet sich in der Bedeutung der Zahlen als Repräsentanten abstrakter Werte wieder. Die gemeinsame Eigenschaft einer Menge von fünf Fingern und von fünf Äpfeln, aus jeweils *fünf* Elemente zu bestehen, wird abstrahiert und damit losgelöst von den konkreten Objekten im Gedanken der Zahl fünf, *fünf* als Zusammenfassung von fünf mal eins. Die Werteigenschaft einer Zahl lässt sich in Wertbeziehungen zu anderen Zahlen begreifen.

Das Wissen um diese Wertbedeutungen von Zahlen und die Einsicht in die logischen Wertbeziehungen von Zahlen bezeichne ich als kardinalen Zahlbegriff. Der Begriff des kardinalen Zahlverständnisses bzw. der kardinalen Zahlenlogik umfasst hier explizit die Wertkategorie der Zahl *im* Zahlsystem. Damit meint kardinal nicht nur den Wert der Zahl selbst, sondern umfasst zugleich deren Bezug auf die Wertigkeiten der anderen Zahlen. Die Zahlrelationen begreife ich immer als Teil des kardinalen Zahlbegriffs. Wer Zahlen kardinal begreift, hält die Aufgabe 8 – 7 für keine besondere gedankliche Herausforderung. Wer acht als „eins mehr als sieben“ denkt, weiß auch, dass sieben eine Teilmenge von acht ist. Wer zudem das Minuszeichen als Aufforderung zur Exklusion einer Teil- aus der Gesamtmenge versteht, kennt die Antwort auf die Frage 8 – 7 schon, bevor die Aufgabe gestellt wird. Das Rechnen basiert auf dem kardinalen Zahlverständnis, hier auf der Einsicht in den kardinallogischen Zusammenhang der Zahlen sieben und acht. Muss bei der Frage danach, wie viele übrigbleiben, wenn sieben von acht weggenommen werden, erst über den Lösungsweg, der zur richtigen Antwort führt, nachgedacht werden, ist die quantitative Beziehung der Zahlen sieben und acht offensichtlich gedanklich nicht abrufbereit.

Rechnerische Kompetenz baut also auf dem Wissen um die kardinale Zahlenlogik und die kardinalen Zahlbeziehungen, den Aufbau des dekadischen Zahlsystems sowie um die Logik der Rechenoperationen und ihres Zusammenhanges auf. Dieses Wissen muss erlernt werden. Seine Erarbeitung setzt einen an der Sache ori-

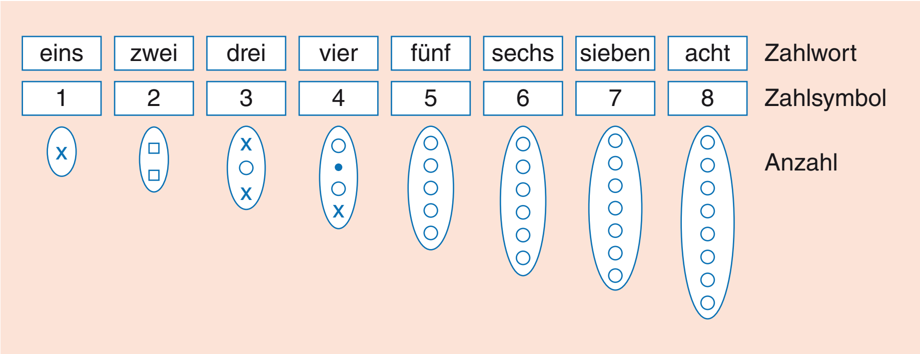

Abb. 1: Zuordnung Zahlwort, Zahlsymbol und Anzahl

entierten und deren Besonderheiten beachtenden Lernprozess voraus. Der Mathematikdidaktiker Oehl formulierte die Notwendigkeit der Sachanalyse im Rechenlernprozess deutlich: „Jedes Fach wird in seiner Struktur durch die ihm eigentümlichen Gesetzlichkeiten bestimmt. Für den Gegenstand des Rechenunterrichts sind die mathematischen Strukturen bestimmend. … Darum müssen am Anfang aller didaktischen Überlegungen gegenstandstheoretische und gegenstandslogische Betrachtungen … stehen. Diese Zurückführung uns so selbstverständlicher rechnerischer Formen und Denkgewohnheiten auf ihre inneren Zusammenhänge verschafft uns didaktische Einsicht und gibt uns Fingerzeige, auf welche Momente wir bei der Behandlung besonderen Wert zu legen haben“ (Oehl 1962, S. 11).

Sich eine Menge vorstellen zu können, ist kein Rechnen.

Schritte beim Erlernen des Rechnens

1. Abstrakte Zahlidentität

Ich sehe das Erlernen des Rechnens als einen hierarchisch aufgebauten Lernprozess. Jeder neue Lerninhalt setzt zu seiner Erarbeitung das Verständnis vorheriger Lerninhalte voraus. Eine Voraussetzung des Rechnenlernens ist es, die Zahlnamen und die Zahlsymbole zu kennen sowie sie einander richtig zuzuordnen. Die Zahlnamen und die Zahlsymbole müssen der damit bezeichneten Anzahl richtig zugeordnet werden. Das Kind muss wissen, dass Zahlen zum Zählen da sind und dass es beim Zählen *nur* um die Anzahl der jeweiligen Objekte geht. Die qualitativen Eigenschaften der zählbaren Objekte, wie Farbe, Form, Funktion, Geschmack, Geruch, bleiben beim Zählen außen vor. Sie sind nur insofern von Bedeutung, als dass qualitative Eigenschaften unter Oberbegriffen zusammengefasst werden und damit weitere Objekte zu den entsprechenden Mengen hinzugezählt werden können: Äpfel und Birnen sind Obst und können entgegen dem bekannten Spruch doch zusammengezählt werden. Beim Zählen wird auf die Anzahleigenschaft der Mengen fokussiert: zwei Kreuze und ein Kreis sind eine Menge von *drei* Zeichen; zwei Punkte und drei Punkte sind *fünf* Zeichen (s. Abb. 1).

Können Zahlname, Zahlsymbol, Anzahl einander richtig zugeordnet werden, liegt aber noch kein kardinales Zahlverständnis vor. Ich möchte ausdrücklich darauf verweisen, dass es ein in den Schulen weit verbreitetes Fehlverständnis vom Ziel des zahlenmathematischen Lernens im Anfangsunterricht gibt. Dieses Fehlverständnis hängt nach meiner Erfahrung mit der Bezeichnung „Mengenvorstellung“ zusammen. Oft beschreiben Lehrer und Eltern, dass dieses oder jenes Kind noch keine oder keine ausreichende *Mengenvorstellung* entwickelt habe. Dies unterstellt, das Kind könne sich keine Objektmengen (z. B. vier oder acht Finger) bildlich vorstellen. Doch die meisten der Schulkinder, die alle Rechenaufgaben auszählen müssen, *können* sich Objektmengen bildlich vorstellen. Sie nutzen die Technik der gedanklichen Visualisierung sogar häufig zur Buchführung über ihre Zählschritte, um ihre Finger nicht offen zu nutzen. Strukturierte Mengen wie unsere Fingermengen oder die Punktbilder von Würfeln können wir uns wegen ihrer Bildhaftigkeit vorstellen. Das Abzählen erfolgt an Stelle der konkreten Finger häufig am vorgestellten Bild der Fingermengen. Kinder bezeichnen diese Form des Zählens dann als „Kopfrechnen“, weil es „nur noch im Kopf“ stattfindet. Sich eine Menge vorstellen zu können, ist jedoch kein Rechnen. Im Gegenteil: Die Annahmen, die erfolgreiche Mengenvorstellung sei das gelungene Zahlverständnis und das Rechnen ließe sich mit einer vorgestellten Menge erledigen, reduzieren das arithmetische Verständnis auf eine Art „Kopfkino“. Zählende Kinder beschreiben ihr „Kopfkino“ beim Lösen von Rechenaufgaben häufig mit Erklärungen wie der folgenden: „Da habe ich mir acht Punkte vorgestellt. In einer Reihe. Und dann sind sieben Punkte weggegangen.“ Hier handelt es sich um eine vorgestellte Abzählhandlung, jedoch um keinen Abruf des Wissens zum quantitativen Zusammenhang von sieben und acht. Bei didaktischen Ansätzen, die auf das Entwickeln von vorgestellten Mengenbildern (meist in Form von Würfelpunktbildern) in Verbindung mit Zahlen und auf das gedankliche Manipulieren der vorgestellten Mengen abzielen, droht ein Verharren des Kindes auf einem vorabstrakten Zahlverständnis (s. Abb. 2).

Den ersten Schritt zum kardinalen Zahlbegriff hat das Kind gemacht, wenn es Zahlen als Zusammenfassung einer bestimmten Anzahl abstrakter Einheiten begreift. Acht muss vom Kind als das sprachliche Symbol und die Ziffer 8 als das schriftliche Symbol des Gedankens verstanden werden, der acht gleichwertige abstrakte Einheiten zusammenfasst. Für das Verständnis aller anderen Zahlen gilt das Gleiche. Zahlen fassen Einheiten im Sinne des Wortes zusammen: Sieben meint siebenmal eine Einheit; acht meint achtmal eine Einheit usw. In ihrer abstrakten Wertbedeutung benötigt die Zahl die konkrete Objektmenge nicht mehr. Anders ausgedrückt: Zahlen existieren nicht in unserer greifbaren Wirklichkeit. Sie sind Ergebnis des menschlichen Nachdenkens über Eigenschaften von sinnlich erfassbaren Mengen. Zahlen sind gedankliche Konstruktionen, die sich beispielhaft bebildern lassen. Doch das Bild ist nicht die Sache selbst. Meine acht ausgestreckten Finger sind ein *konkretes Beispiel* für die Zahl acht, die eine *abstrakte Kategorie* ist. Kein Kind muss dies so ausdrücken können. Kinder sollen aber wissen, dass Zahlen gleichwertige Einer zusammenfassen und dass diese Einer für keine konkrete Objektmenge, sondern nur für sich selbst stehen.

2. Abstrakte Zahldifferenz

Jeder weitere Gedanke in der kardinalen Zahlenlogik ist eine Schluss-

Rechenschwäche lässt sich auf ein Fehlverständnis der kardinalen Zahlbedeutung zurückführen.

folgerung des gerade Beschriebenen. Die einzelnen Gedanken sind dabei keineswegs trivial, wie unsere Erfahrungen in der Analyse zur zahlenmathematischen Inkompetenz von Kindern, Jugendlichen und Erwachsenen zeigen. Die typischen Formen der Rechenschwäche lassen sich auf das Fehlen oder auf ein Fehlverständnis der kardinalen Zahlbedeutung an sich und der nachfolgend beschriebenen Gedanken zurückführen.

Schlussfolgerung 1: Aus dem Wissen um die Wertbedeutungen von Zahlen lässt sich eine Reihenfolge der Zahlen bilden, ausgehend vom Wert eins durch die jeweilige Erhöhung der Werte um eins. Damit ist das Bildungsprinzip der Reihe der natürlichen Zahlen, die Seriation um eins, beschrieben: Der Nachfolger einer Zahl ist immer eins mehr als die Zahl selbst. Dies lässt sich unendlich weiterdenken. Wenn die jeweils nachfolgende Zahl durch Erhöhung um eins gebildet werden kann, muss sich die jeweils davorliegende Zahl durch Verminderung um eins bilden lassen.

Zahlen sind gedankliche Konstruktionen, die sich beispielhaft bebildern lassen.

Schlussfolgerung 2: Wenn die jeweils nachfolgende Zahl durch Erhöhung der Zahl um eins gebildet werden kann, kann die Zahl, die der nachfolgenden Zahl folgt, durch eine erneute Erhöhung um eins gebildet werden. In Bezug zur Ausgangszahl ist dies eine Erhöhung um eins und eins, was wertidentisch mit dem Begriff zwei ist ($2 = 1 + 1$). Diese fortlaufende Erhöhung um eins und die jeweilige Zusammenfassung der gleichwertigen Einheiten mit wertidentischen Zahlnamen lassen sich logisch fortsetzen und als entsprechende Wertverminderung umkehren.

Schlussfolgerung 3: Wenn die jeweils nachfolgende Zahl durch Erhöhung der Zahl um eins gebildet werden kann, muss diese Zahl in der nachfolgenden Zahl enthalten sein. Zahlen lassen sich folglich durch das Zusammendenken anderer Zahlen bilden, wobei diese dann Teilmengen der gebildeten Zahl sind.

Schlussfolgerung 4: Wenn Zahlen ineinander enthalten sind, dann kann dies umgekehrt auch als mögliche Zerlegung von Zahlen in die darin enthaltenen Zahlen geringerer Wertigkeit gedacht werden. Zahlen lassen sich in andere Zahlen zerlegen, wobei es bei Konstanz der zerlegten Zahl eine systematische Beziehung zwischen deren Teilmengen gibt: Die Verminderung um eins in einer Teilmenge führt zur Erhöhung um eins in der anderen Teilmenge.

Schlussfolgerung 5: Wenn Zahlen aus anderen Zahlen gebildet und wieder in diese Zahlen zerlegt werden können, kann der mit einer Zahl gemeinte Wert auch durch die logische Verknüpfung anderer Zahlen ausgedrückt werden. Die Zahl 8 ist wertgleich mit der Zusammenfassung von sieben und eins ($8 = 7 + 1$) wie auch mit der Zusammenfassung von sechs und zwei ($8 = 6 + 2$) usw. Sie ist zugleich wertgleich mit der Verminderung von neun um eins ($8 = 9 - 1$), von zehn um zwei ($8 = 10 - 2$) usw. Der Wert einer Zahl lässt sich folglich in unendlich vielen Möglichkeiten mit Bezug auf die Werte anderer Zahlen ausdrücken (s. Abb. 3).

Damit sind die grundlegenden gedanklichen Bausteine des kardinalen Zahlkonzeptes beschrieben. Zahlen in

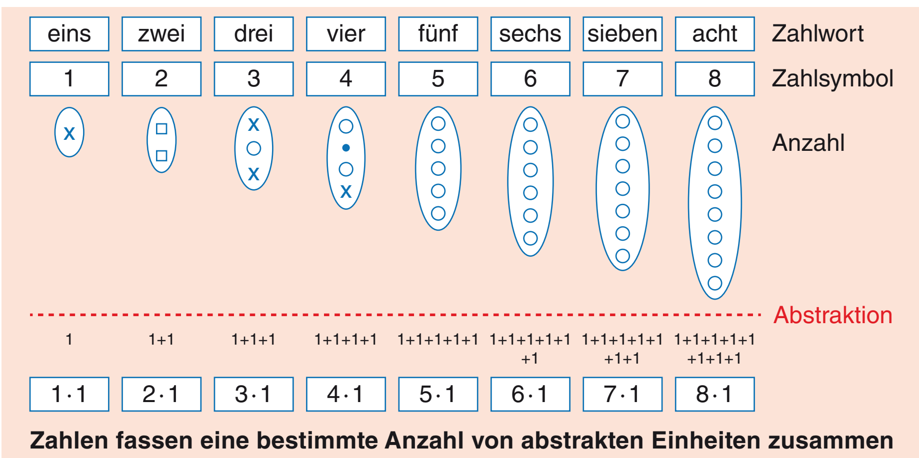

Abb. 2: Kardinale Zahlabstraktion

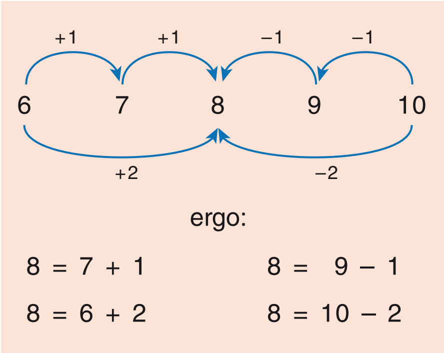

Abb. 3: Logische Konsequenzen der Zahlseriation

ihrer kardinalen Bedeutung zu begreifen heißt, sie in ihren quantitativen Beziehungen zu den anderen Zahlen zu denken und beschreiben zu können. Im kardinalen Zahlbeziehungsdenken liegen die Voraussetzung und zugleich der Übergang zum Rechnen. Beim Wertvergleich von Zahlen ($7 \neq 8$; $7 < 8$; $8 > 7$) und in der Beschreibung von Wertbeziehungen (acht ist eins mehr als sieben; sieben ist eins weniger als acht) kommen die logischen Schlussfolgerungen aus dem kardinalen Zahlwissen zur Anwendung. Wer sieben und acht jeweils als Zusammenfassung gleichwertiger abstrakter Einheiten und dabei acht als eins mehr als sieben sowie umgekehrt sieben als eins weniger als acht begriffen hat, denkt sieben wie auch eins als Teilmengen von acht. Er kann über dieses Teile-Ganze-Verständnis quantitative Beziehungen zwischen allen Teilmengen und dem Ganzen gedanklich herstellen und sie beschreiben.

Beim Beschreiben eines Mengenzusammenhangs wird dieser zugleich gedanklich reflektiert. Im Moment der Versprachlichung des kardinalen Zusammenhangs wird das Konzept der kardinalen Zahlenlogik als Mengenbeziehungsdenken schon erfolgreich angewendet. Ich habe im vorigen Abschnitt für die Erläuterung der mengenlogischen Zusammenhänge der Zahlen acht, sieben und eins keine bildliche Veranschaulichung, sondern die schriftliche Beschreibung gewählt. Es ist die Sprache, die die gedankliche Reflexion über das Gesehene, das Gehörte oder das taktil Erfahrene ermöglicht. Die Versprachlichung unserer Gedanken hilft uns, das sensuell Erfasste zu differenzieren, Gemeinsamkeiten und Unterschiede zu benennen, Begründungen zu geben und Schlussfolgerungen herzuleiten. In der Versprachlichung der mathematischen Inhalte und Strukturen findet deren Bewusstwerdung statt.

Zählen ist nicht rechnen

Beim Rechnen wird das Wissen zur kardinalen Logik von Zahlen und Rechenoperationen logisch verknüpft. Zählen basiert auf keiner kardinallogischen Verknüpfung. Zählen erfordert ein Zahlverständnis, was die Zahlen als Teile der Zahlenreihe, sozusagen als Position in dieser Reihe begreift. Acht ist in diesem Verständnis nicht eins mehr als sieben, sondern schlicht das, was nach sieben kommt. Die mengenbezogene Begründung des Zusammenhanges beider Zahlen fehlt. Methodisch beruht das Zählen darauf, die bekannte Zahlenreihe „abzuschreiten". Das letztgenannte Zahlwort ist beim Zählen zur Anzahlbestimmung eben die Anzahl der ausgezählten Menge. Wird das Zählen zur Lösung von Rechenaufgaben genutzt, so wird das letztgenannte Zahlwort als Ergebnis begriffen. Das Zählen erfordert anders als das Rechnen kein kardinales Zahlwissen. Zähler müssen zählen können – mehr zunächst nicht. Um richtige Ergebnisse hervorzubringen, benötigen sie zudem eine Methode der Buchführung über ihre Zählschritte. Dies ist der wesentlich aufwendigere Teil des Zählaktes. Auch dabei erfolgt kein Bezug auf die kardinallogischen Beziehungen der Zahlen. Beim Auszählen der Aufgabe $8 - 7$ muss von acht aus rückwärts oder von sieben aus vorwärts gezählt werden. Damit der Zählakt nach der entsprechend Anzahl der Zählschritte eingestellt werden kann, muss jeder Zählschritt erfasst werden. Im folgenden Bild werden die gegenläufigen Zählreihen beim Rückwärtszählen ab acht dargestellt (s. Abb. 4).

Die Zählschritte werden von den meisten Zählern mit Hilfe der echten oder vorgestellten Finger, mit tatsächlich vorliegenden oder vorgestellten Zahlenstrahlen oder mit Hilfe anderer Objekte erfasst. Einige Zähler zählen beide Zählreihen ohne Hilfe von Objekten synchron gedanklich mit: acht gleich eins (für den ersten Zählschritt), sieben gleich zwei usw. Der betriebene Aufwand ist bei allen Formen des Zählens enorm und wird nur von dem erbracht, der keine andere Lösungsmöglichkeit hat. Mit dem oben beschriebenen kardinalen Zahldenken hat das „Abschreiten" der Zahlenreihe nichts zu tun.

Genese des Zählens als Ersatzform des Rechnens

Misslingen die Einsichten in die oben benannten Gedanken zum kardinallogischen Verständnis der Zahlen, dann werden Schulkinder nicht von dem befreit, was sie mangels Wissen nicht können. Stattdessen wird auch ihnen abverlangt, Rechenaufgaben zu lösen. Die Aufforderung, eine Leistung zu erbringen, deren Voraussetzungen beim Erbringer nicht vorliegen, grenzt ans Absurde. Außerhalb der Schule würden wir ein solches Ansinnen uns selbst betreffend mindestens belächeln, wenn nicht gar brüsk ablehnen. Für das Schulkind ist die Situation dagegen heikel. Es kann die gestellte Aufgabe nicht mit dem Hinweis auf sein mangelndes Wissen ablehnen. Dies würde als Leistungsverweigerung gewertet und sanktioniert. Es muss sich also der Mittel bedienen, die es hat: Dies sind sein Wissen

Kein Zählen ohne Buchführung!

8 – 7 ⟶ Zählreihe rückwärts: 8 7 6 5 4 3 2 1

Zählschritte vorwärts: 1 2 3 4 5 6 7 „ergo" 8 – 7 = 1

Abb. 4: Zählen

um die Zahlenreihe und seine darauf aufbauenden Zählfertigkeiten. Dabei bringt der erzwungene Umgang mit unverstandenen Sprach- und Schriftsymbolen die verschiedensten subjektiven Annahmen über das damit Gemeinte hervor.

Hier soll nicht auf die Vielfalt der Zähltechniken eingegangen werden, sondern auf das Gemeinsame allen Zählens: Es ersetzt das Rechnen. Das Zählen entspringt nicht einem fehlenden Vorstellungsvermögen des Schulkindes oder einer mangelnden Konzentration, nicht einem fehlenden Abstraktionsvermögen und nicht anderen hirnorganischen Defiziten und es entspringt nicht mangelndem Willen des Kindes zum Erlernen des Rechnens. Wenn das Zählen als ein ausgesprochen zeit- und konzentrationsaufwendiges Verfahren zur Lösung von Rechenaufgaben beibehalten wird, ist dies ein sicherer Hinweis darauf, dass die kardinale Logik der Zahlen und des Zahlsystems unverstanden ist.

Wie in den meisten Dingen des Lebens nutzen wir auch beim Lösen von Rechenaufgaben den Weg des geringsten Aufwandes, hier den Rückgriff auf das Zahlbeziehungswissens zu acht und sieben. Wer sich diese Logik erschlossen hat, betreibt keinen weiteren gedanklichen oder physischen Aufwand zur Lösung von 8 – 7. Das Zählen als Strategie zum Lösen von Rechenaufgaben verweist auf einen Mangel an Einsichten in die kardinale Zahlenlogik. Der Terminus „zählendes Rechnen“ ist ein Widerspruch in sich. Wer zählt, rechnet eben gerade nicht. Er rechnet nicht, weil er die Inhalte und Beziehungen der benannten Zahlsymbole nicht bzw. noch nicht verstanden hat.

In meiner Praxis finde ich häufig Beschreibungen wie „Tim rechnet noch zählend“. In Gesprächen verweisen (Förder-) Lehrer nach Lösungsprozessanalysen, die ein arithmetisches Unverständnis von Schülern offenlegten, darauf, dass diese Schüler „eben (noch) anders rechnen“. Das würde sich schon geben. Das Zählen wird in dieser Einschätzung als ein Rechenweg unter vielen begriffen. Das Zählen ist lernbiografisch ein erster Zugang zur Ermittlung von Gesamt- oder Restmengen. Um arithmetisch kompetent zu werden, bedarf es aber des Rechnens. Ich begreife das Rechnen als Methode wissensbasierter Schlussfolgerungen zum kardinalen Zahlinhalt in einem grundsätzlichen Unterschied zum Zählen als Technik der Positionsbestimmung in der Zahlenreihe.

Der Terminus des „zählenden Rechnens“ verstellt den Blick der Lehrkraft auf ein frühes Erkennen von Rechenschwächen. Wer annimmt, dass das Zählen ein Rechenweg unter vielen ist, der sich im Laufe der ersten beiden Schuljahre verliert, hat den Aufbau des arithmetischen Lernens nicht verstanden. Wenn die Aufgabe 8 – 7 nur zählend und danach die Aufgabe 8 – 6 erneut nur zählend gelöst werden kann, sind die quantitativen Bedeutungen der benannten Zahlen und ihr logischer Zusammenhang unverstanden. Wird auf diese Situation nicht reagiert und das fehlende Wissen mit dem Schulkind nicht erarbeitet, sondern stattdessen im Lernstoff weitergeschritten, können die darauf aufbauenden Inhalte nicht oder nicht richtig verstanden werden.

Die Biografieforschung zum rechenschwachen Schulkind, die in unserer dyskalkulietherapeutischen Facheinrichtung erfolgt, gibt Auskunft über die weitere Entwicklung der Rechenersatzformen, wenn das Zählen als eines der frühesten Symptome zahlenlogischer Wissensmängel übersehen wird. In den beiden ersten Schuljahren kultivieren Zähler ihre Zähltechniken: Sie werden schneller und nutzen effektivere Methoden zur Buchführung über ihre Zählschritte. Dieser Prozess wird begleitet durch das Auswendiglernen von Aufgabensätzen, von Regeln, Merksätzen und auch von Algorithmen zum Lösen von Aufgaben mit zweistelligen Zahlen. Ab dem dritten Schuljahr wird das Zählen ergänzt und zunehmend abgelöst durch das mechanische Anwenden von antrainierten Algorithmen der schriftlichen Verfahren. Hier muss nur noch bis 20 gezählt und ansonsten der Algorithmus schematisch abgearbeitet werden. Damit ist jede Aufgabe lösbar. Aufgaben wie 13 – 12, 21 – 19 oder 100 – 98 werden ebenso durch das schematisch algorithmische Vorgehen, meist mit Zähltechniken gekoppelt, gelöst. Das Zählen erledigt sich nicht von selbst. Darauf zu warten, dass „das schon noch kommt, weil eben jeder sein eigenes Lerntempo hat“, verkennt die Besonderheiten im Aufbau des arithmetischen Lernens. (Und man erklärt sich damit als Lehrkraft für überflüssig, da ja schon das bloße Abwarten zum Wissenszuwachs führen soll.) Das Zählen wie alle weiteren Rechenersatzformen stützen stattdessen das mathematische Unverständnis, da sie jede analytische Auseinandersetzung mit der Sache verhindern. Die Arithmetik wird in der Biografie des Rechenschwachen zu einer bloßen Ziffernmanipulation, die unverstandenen Regeln folgt.

> „Zählendes Rechnen“ ist ein Widerspruch in sich: Wer zählt, rechnet eben gerade nicht.

Erkennen, was verstanden und was unverstanden ist: die mathematische Lernstandsanalyse

Dieser Prozess wird durch einen Unterricht gefördert, der kaum oder gar nicht sachanalytisch ausgerichtet ist und in dem das richtige Ergebnis der Rechenaufgabe – vor allem, wenn es schnell hervorgebracht wird – als Nachweis des Sachverständnisses dient. Das richtige Ergebnis gibt aber keine Auskunft über den Lösungsprozess und die darin geronnene Logik. Zur Beurteilung des subjektiven Verständnisses des Schülers müssen wir dessen Denkweisen und Herangehensweisen an mathematische Fragestellungen untersuchen. Wir müssen abklären, ob sein Vorgehen beim Lösen der Aufgabe der mathematischen Sachlogik entspricht oder ob dies nicht der Fall ist: Wird die Fragestellung der Aufgabe richtig erfasst? Werden beim Lösen die kardinalen Zahlinhalte und Zahlbeziehungen sowie die Logik der Rechenoperationen erfasst und genutzt? Können die Vorgehensweisen und Ergebnisse sachlich richtig begründet werden? Nur die Untersuchung der Denkweisen und des Vorgehens beim Lösen mathematischer Aufgaben gibt Auskunft über das subjektive Bewusstsein über die mathematische Logik. Für ein gezieltes Lernangebot bei lernhierarchisch aufgebauten Inhalten muss bekannt sein, welche Inhalte schon verstanden sind oder negativ ausgedrückt: welche Inhalte noch gar nicht oder nicht richtig verstanden sind. Wie sich aus der Sachanalyse der „inneren Zusammenhänge“ (Oehl) der Zahlenmathematik die aufeinander aufbauenden Inhalte beim Erlernen des Rechnens ableiten lassen, so lässt sich aus der Analyse des subjektiven Verständnisses im Vergleich mit der objektiven Sachlogik auf den individuell notwendigen Ansatzpunkt des mathematischen Lernens schließen.

Das richtige Ergebnis gibt keine Auskunft über den Lösungsprozess.

Eine detaillierte mathematische Lernstandsanalyse ist der erste Schritt zur effektiven Hilfe bei mathematischen Lernproblemen und bei Rechenschwächen. Diese Lernstandsanalysen, die auch als qualitative Diagnostik bezeichnet werden, gehören zur täglichen Arbeit in dyskalkulietherapeutischen Facheinrichtungen. Unsere Erfahrungen haben wir in einem Rechentestverfahren für die Klasse 1 bis 4, dem Jenaer Rechentest (JRT), zusammengefasst.

Mit dem JRT liegt ein lösungsprozessanalytisches Verfahren zur detaillierten Erfassung des individuellen zahlenmathematischen Lernstandes vor. Als Einzeltestverfahren erfasst der JRT das subjektive Verständnis und Wissen des Schulkindes über die elementare zahlenmathematische Logik. Dabei wird das subjektive Verständnis der Zahlenmathematik mit der arithmetischen Sachlogik als objektivem Beurteilungskriterium verglichen. Der JRT analysiert die individuellen Denkweisen, Vorgehens- und Lösungsprozesse hinsichtlich der ihnen zu Grunde liegenden Logik. Die Ergebnisse des Rechentests geben Auskunft über den Verständnisgrad und über die Kompetenzen des Schülers in den verschiedenen aufeinander aufbauenden Teilgebieten der Zahlbegriffsentwicklung und in der Entwicklung der Rechenfertigkeiten. Mit dem JRT können qualitative Aussagen über vorhandenes und/oder fehlendes zahlenmathematisches Wissen beim Schulkind gemacht werden. Die Testergebnisse werden dabei keinem Auswertungsschema nach Anzahl der richtigen und falschen Lösungen unterzogen. Damit wäre nur ein Abgleich der Testergebnisse mit der Alters- oder Klassennorm möglich. Dieser Abgleich bringt das inhaltliche Verständnis des Rechenproblems keinen Schritt weiter. Stattdessen ermöglicht der JRT, die erfolgten Beobachtungen beim Lösen der Testaufgaben zu notieren und diese Beobachtungen hinsichtlich des darin ablesbaren mathematischen Verständnisgrades zu kategorisieren.

Mit dem JRT lassen sich in einer ersten Ebene Aussagen über den inhaltlichen Umfang der Beeinträchtigung der Rechenfertigkeiten machen. Die Auswertungsergebnisse geben Auskunft, bis zu welchem Punkt die aufeinander aufbauenden Inhalte der Zahlenmathematik sicher verstanden sind bzw. welche Inhalte nur fragmentarisch vorliegen oder gänzlich fehlen. In einer zweiten Ebene werden die subjektiven Denkweisen der unverstandenen Mathematik untersucht: Wie ersetzt das Kind die fehlenden zahlenlogischen Einsichten? Mit welchen Ersatztechniken des Rechnens wird operiert? Damit geht der Test über die bloße defizitäre Betrachtung des rechnerischen Unverständnisses hinaus und ermöglicht den Einblick in die zahlenmathematische Welt des einzelnen Schulkindes. Rechenschwäche ist kein fehlendes Denken, sondern ein falsches Denken über Zahlen. Mit dem JRT wird dieses falsche Denken für die Lehrkraft ebenso wie für den Dyskalkulietherapeuten verständlich.

Nur wenn beide Ebenen – die fehlenden zahlen- sowie rechenoperationslogischen Inhalte *und* die dieses Wissen ersetzenden Gedanken und Verfahren – verstanden werden, kann eine zielgerichtete Unterstützung von rechenschwachen Schülern bzw. von Schülern mit mathematischen Lernproblemen erfolgen. Der mathematisch Lehrende muss beides verstehen: die objektiven Besonderheiten beim Erlernen des Rechnens *und* die subjektiven Formen des gescheiterten Rechnenlernens. ■

Anmerkung

Der Jenaer Rechentest ist in Kürze über die Webseite www.jenaer-rechentest.de beziehbar.
Der Autor leitet das Zentrum zur Therapie der Rechenschwäche in Potsdam und in weiteren Orten. Er ist zudem als Sachverständiger zur Frage von mathematischen Lernproblemen, als Lehrbeauftragter an der Universität Potsdam und als Referent von Fortbildungen für Lehrkräfte und Erzieher und Erzieherinnen tätig.

Literatur

Oehl, Wilhelm (1962): Der Rechenunterricht in der Grundschule, Hannover 1962.

Anschrift des Autors

Dr. Jörg Kwapis, Hebbelstraße 12,
14469 Potsdam, E-Mail:
joerg.kwapis@ztr-rechenschwaeche.de