

## „Sprachliches Denken“ und seine Bedeutung beim mathematischen Lernen

In dem folgenden Artikel möchte ich die Bedeutung des Sprechens als einer Funktion des Denkens beim Erlernen des Rechnens herausarbeiten. Dabei beziehe ich mich auf das Konzept Lev Vygotskijs' zum Verhältnis von Sprache und der Entwicklung des begrifflichen Denkens. Seinen Begriff des „sprachlichen Denkens“ nutze ich im Folgenden. Als leitende Idee meiner Zeilen begreife ich die vorantreibende Funktion bei der Entwicklung des mathematischen Denkens, die der sprachlichen Reflexion

über mathematische Zusammenhänge – ich nenne dies das mathematische Sprechen – zukommt. Dabei möchte ich voranstellen, dass ich das Sprechen nicht nur auf lautliches Sprechen beziehe. Der Austausch von Gedanken ist an kein spezifisches Medium gebunden. Kommunikation ist auch in Gesten (als Gebärdensprache), über Mimik (als Lippenlesen), mit Ikonen und Zeichen als ikonische Sprache oder als Schriftsprache möglich.

### Das Sprechen als Austausch und als Funktion des Denkens

Die ursprüngliche Funktion von Sprache liegt im Austausch über Erlebtes, über Befindlichkeiten, über Erwartungen und unsere Gedanken, kurz über alles, was uns bewegt und beschäftigt. Beim Sprechen wird dabei nicht nur etwas mitgeteilt, sondern das Sprechen hat zugleich eine analysierende Funktion. Beim Berichten über das Erlebte ordnen und gliedern wir dieses, damit es zu einer einerseits erzählbaren und andererseits nachvollziehbaren Abfolge von Gedanken wird. Indem wir etwas mitteilen, setzen wir uns mit den Inhalten, über die wir berichten, auseinander. Jeder kennt Situationen, in denen ihm beim Erklären einer Sache diese erst verständlich wird. Das Beschreiben ist dabei eine gedankliche Tätigkeit, bei der differenziert, kategori-

siert, geordnet und strukturiert wird. Sprache hat mithin Funktionen, wie wir sie vom Denken kennen. Vygotskij (2002, 51) beschreibt dies so: „Um einen anderen Menschen irgendein Gefühl oder einen Bewusstseinsinhalt mitzuteilen, gibt es keinen anderen Weg, als diesen Inhalt einer bestimmten Klasse oder Gruppe von Erscheinungen zuzuordnen, und dies erfordert, wie wir wissen, unbedingt eine Verallgemeinerung.“ Indem wir sprechen, abstrahieren wir von der konkreten Situation. Daraus entwickeln wir gedankliche Konzepte, mit denen wir Begriffe bilden können. Mit diesen Begriffen können wir dann unabhängig von der unmittelbaren sinnlichen Wahrnehmung gedanklich operieren.



**Dr. Jörg Kwapis**

Leiter des Zentrums zur  
Therapie der Rechenschwäche  
Potsdam

**Kontakt unter:**

joerg.kwapis@  
ztr-rechenschwaech.de

<sup>1</sup> L. S. Vygotskij, ein sowjetischer Psychologe, veröffentlichte 1934 ein Standardwerk zum Zusammenhang von Sprache und Denken: Denken und Sprechen: Psychologische Untersuchungen, Herausgegeben und übersetzt von J. Lompscher, Beltz 2002.

Damit verfügen wir auch über Kategorien, um wirkliche Situationen zu interpretieren und Handlungen zu planen. Mit unserem begrifflichen Denken können wir so auf das konkret Erlebte zurückwirken. Unsere Wahrnehmungen der Wirklichkeit werden durch unsere Begriffe davon geprägt. Sprache fungiert als Vermittler zwischen der sinnlich er-

fahrenen Wirklichkeit und ihrer begrifflichen Abstraktion. Das Sprechen kann dabei als eine Tätigkeit des Bewusstmachens und Bewusstwerdens von Zusammenhängen begriffen werden. In dieser Tätigkeit überschneiden sich die Funktionen des Denkens und Sprechens. Vygotskij bezeichnet dies als „sprachliches Denken“.

### „Sprachliches Denken“ beim mathematischen Lernen

Wenn wir etwas benennen können, können wir unsere Wahrnehmung auf die benennbaren und damit schon vorab bestimmten Aspekte der Wirklichkeit richten. Mit deren Benennen grenzen wir Merkmale voneinander ab; wir heben sie heraus und nutzen sie zur Bildung von Gruppen gleicher Eigenschaften. Mit den benennbaren Merkma-

*Wenn wir etwas benennen können, können wir unsere Wahrnehmung auf die benennbaren und damit schon vorab bestimmten Aspekte der Wirklichkeit richten.*

len können wir gedanklich operieren. Schauen wir uns dies am Beispiel der Anzahleigenschaft von Mengen an:

Wir können den Fokus unserer Wahrnehmung auf die Anzahleigenschaft von Mengen richten und alle anderen Eigenschaften wie Farbe, Form, Funktion außer Acht lassen. Darüber lassen sich Gruppen von Mengen mit der gleichen Eigenschaft bilden: Das sind drei Würfel, das sind drei Finger, das sind drei Kekse. Wir können im nächsten Schritt das gruppenbildende Merkmal herausheben: In allen Mengen sind drei Elemente. Mit dem Herausarbeiten der Wortbedeutung „drei“ aus dem situativen Zusammenhang der jeweiligen Anzahl wird „drei“ zur Kategorie, die von der konkreten Situation losgelöst ist. Mit dem Wort drei und dessen Bedeutung

können wir nunmehr gedanklich operieren. Wir können den Begriff nutzen um Situationen in ihrer Konstanz, ihrer Veränderung und ihren Unterschieden zu verstehen: Es lassen sich noch andere Mengen finden, die drei Elemente enthalten. Es gibt aber auch Mengen, die nicht drei Elemente enthalten. Alle Anzahlen können zu drei werden, wenn Elemente hinzugefügt oder weggenommen werden. Indem wir Anzahlssituationen, ihre Gemeinsamkeiten und Unterschiede beschreiben lernen, lenken wir nicht nur den Fokus auf die numerischen Eigenschaften von Mengen, sondern wir unterstützen das Entwickeln gedanklicher Kategorien, die von der konkreten Situation abstrahieren und die zum kardinalen Zahlbegriff führen. Im Beschreiben des Konkreten kann dieses geordnet werden; es kann differenziert und klassifiziert werden. Dabei finden zugleich mehrere Prozesse statt: Es werden subjektive gedankliche Kategorien zum Einordnen des Erlebten entwickelt. („Drei“ kann als Eigenschaftsbezeichnung einer spezifischen Situation verstanden werden.) Vorliegende und insofern „objektive“ Kategorien werden auf ihre Tauglichkeit getestet. („Drei“ kann für Kinder, Kekse, Katzen und noch



mehr verwendet werden.) Mit dem Beschreiben des Situativen wird dieses hinsichtlich seiner Bedeutung reflektiert und kategorial eingeordnet. Das „sprachliche

## Mathematisch sprechen

Der Weg zur mathematischen Begriffsbildung verläuft als ein Prozess des Bewusstwerdens von Zusammenhängen in einem Denksystem logisch aufeinanderbezogener und widerspruchsfreier Inhalte, in dem sich eine eigene Sprache und eine eigene Zeichensymbolik entwickelt haben. Mathematischer Austausch findet in seiner kürzesten Form mit Hilfe spezifischer Schriftzeichen statt. Um dieser Sprache zu folgen, um die Systematik ihrer Begriffe zu verstehen, muss die mathematische Systematik, ihre aufeinander aufbauenden und aufeinander bezogenen Gedanken verstanden werden. Mathematisch denken lernen erfordert einen Gedanken, eine Schlussfolgerung, ein Ergebnis begründen zu können. Nicht allein das „Wie bin ich dahin gekommen?“, sondern weiter auch das „Warum kann dies nur so und nicht anders sein?“ ist der Nachweis dafür, dass der Zusammenhang verstanden ist. Das Benennen, Beschreiben und Ableiten von Zusammenhängen, das Begründen des Richtigen wie das Abgrenzen des Falschen sind in diesem Lernprozess die sprachgebundenen Mittel des Denkens. In seiner Beschreibung wird das Wahrgenommene analysiert, differenziert und geordnet. Im Sprechen über das Geschehene werden dessen Bedeutungen bewusst. Übertragen auf das Erlernen des Rechnens bedeutet dies, die Lösung einer Rechenaufgabe nicht nur hervorzubringen, sondern diese im Rahmen der kardinalen Zahlenlogik auch richtig begründen zu können. Die Aufgabe  $6 - 5$  ist demzufolge

Denken“ in der Mathematik beginnt mit diesen basalen Prozessen des Ein- und Zuordnens von Situationen zu Wortbedeutungen.

und meiner Auffassung nach noch nicht zufriedenstellend gelöst, wenn die Antwort „eins“ gegeben wird. Entscheidend sind die Einsichten, die die Antwort begründen. Liegt ein gedanklicher Zugriff auf die kardinallogischen Inhalte der Symbole 6 und 5 sowie ihres quantitativen

Zusammenhangs vor? Wird sechs als Zusammenfassung von sechs Einern; fünf als Zusammenfassung von fünf Einern begriffen? Wird sechs damit als eins mehr als fünf; fünf als eins weniger als sechs gedacht? Werden sechs und fünf in Bezug zueinander gedacht: sechs als bildbar aus fünf und eins sowie als zerlegbar in fünf und eins; fünf als Teilmenge von sechs? Die abstrakt-quantitativen Bedeutungen von Zahlen werden erst dann zu einem Begriff, dem kardinalen Zahlbegriff, wenn die Zahlbedeutungen in ihren vielfältigen quantitativen Beziehungen zueinander verstanden sind. Die Zahl sechs ist nicht verstanden, wenn sie nur als sechs Einer begriffen wird, sondern erst wenn sie als eins mehr als fünf, zwei mehr als vier, aber auch eins weniger als sieben usw. verstanden wird. Sich der kardinalen Zahlbedeutungen bewusst zu sein, bedeutet, die Querverbindungen und Strukturen so gut zu kennen, dass der quantitative Inhalt einer Zahl mit anderen Zahlen beschrieben werden kann:  $6 = 5 + 1 = 7 - 1$ . Wer gut mathematisch spricht, weiß um unzählige Varianten, mit denen sich der Wert einer Zahl beschreiben lässt.

*Die mathematische Sprache ist eine extrem reduzierte Sprache, die jedem Zeichen eine exakte definierte Bedeutung zuweist.*

### Mathematisches Lernen durch „sprachliches Denken“

Das „sprachliche Denken“ unterstützt den Prozess, sich der mathematischen Inhalte und Strukturen bewusst zu werden. Dabei führt die Besonderheit des Gegenstandes zu einer spezifischen Sprache. Mathematisches Denken ist ein schlussfolgerndes Denken in einem widerspruchsfreien System gesetzter Begriffe und darauf aufbauender Gedanken. Die mathematische Sprache bildet diese strenge Logik ab. Sie ist eine extrem reduzierte Sprache, die jedem Zeichen eine exakt definierte Bedeutung zuweist. Damit unterscheidet sie sich erheblich von der Alltagssprache. Im Alltag dient Sprache zur Regelung des Umgangs miteinander. Begriffe werden meist beiläufig verwendet. In dem Moment, in dem diese Beiläufigkeit aufgehoben wird, in dem wir Sprache benutzen um Situationen unter bestimmten Fragestellungen zu analysieren und Antworten zu generieren, beginnt wissenschaftliches Denken. Mathematisches Sprechen über numerische (oder geometrische) Eigenschaften ist also vom ersten Wort an ein „sprachliches Denken“, das den Regeln wissenschaftlichen Denkens folgt. Sprechen und denken überschneiden sich im „sprachlichen Denken“. Das Sprechen ist ein hervorragendes Werkzeug, um das Denken zu lenken, zu unterstützen

und anzuregen. Das Sprechen ermöglicht uns Erlebtes zu strukturieren, dieses in seiner Komplexität zu ordnen und zu linearisieren, Gemeinsamkeiten und Unterschiede zu beschreiben, Argumente und Zusammenhänge zu formulieren, Ableitungen zu begründen, Beweise zu führen und gedankliche Operationen wie konkrete Handlungen zu planen. Mit der Sprache verfügt das Denken über ein vorzügliches Werkzeug zur Abstraktion. Zum Erarbeiten der abstrakten Inhalte der Mathematik sollten wir auf dieses Werkzeug nicht nur nicht verzichten, sondern wir müssen es besonders umfassend nutzen. Schülerinnen und Schüler sollten von der ersten Mathematikstunde an das mathematische Sprechen erlernen. Dabei geht es nicht um das auswendige Aufsagen von Merksätzen und Definitionen, sondern es geht darum, das Beobachtete mathematisch zu interpretieren, die eigenen Überlegungen, vermutete Zusammenhänge möglichst genau zu beschreiben und dabei das eigene Lexikon der Fachbegriffe zu erweitern. Beim Erklären denkt man laut. Das Sprechen ist immer „sprachliches Denken“. Das mathematische Sprechen treibt das mathematische Denken voran.