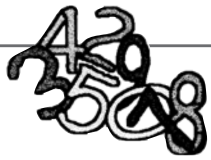
Kopf und Zahl

JOURNAL
des **Vereins für Lerntherapie und Dyskalkulie e.V.**
in Zusammenarbeit mit den **Mathematischen Instituten zur Behandlung der Rechenschwäche**
41. AUSGABE, Frühjahr 2025
www.dyskalkulie.de



Anzahlbewusstsein – Was ist das überhaupt und warum ist es fürs Rechnen so wichtig?

Hans-Joachim Lukow, Katja Rochmann
Osnabrücker Zentrum für mathematisches Lernen

Die meisten Kinder freuen sich bei Schulbeginn auf das Rechnenlernen. Viele Erstklässler haben bis zur Einschulung Vorstellungen von Mengen und deren Anzahlen entwickelt. Sie erfassen oftmals unbewusst bzw. intuitiv die Unterschiede zwischen den Zahlbedeutungen im alltäglichen Gebrauch von Zahlen und können beim Erstunterricht an diese Einsichten anknüpfen. Aber nicht allen Kindern gelingt der Einstieg in die Welt der Zahlen. Ein nicht geringer Anteil der Schulanfänger verfügt noch gar nicht über die Lernvoraussetzungen für die 1. Klasse. Für diese Kinder geht der Lernprozess mit einer Bandbreite von Irrtümern und Missverständnissen einher.

Dass mathematische Vorläuferfähigkeiten einen großen Einfluss auf die Entwicklung von Rechenstrategien haben, das weiß man heute definitiv. Aber welches Wissen spielt für das Verstehen der mathematischen Begriffe eine Rolle? Welche Grundlagen in der Zahlbegriffsbildung sollten Kinder im Umgang mit Zahlen und Mengen entwickelt haben, bevor sie in die Schule kommen?

Eins, zwei, drei, ... Zahlen: Name – Ordnung – Anzahl (Zahlbedeutungen)

Neben der Kenntnis der Zahlwortreihe, dem Schreiben und Lesen von Zahlen, der Darstellung von Zahlen in unterschiedlichen Repräsentationen (bildhaft, als Ziffer, als Wort, mit Anschauungsmaterial), müssen Kinder lernen, Zahlen als Anzahlen zu begreifen. Diese Interpretation von Zahlen ist eine elementare Grundlage, um im Erstunterricht die Anforderungen für das Rechnen-Können zu bewältigen.

Uns Erwachsenen genügt häufig ein kurzer Blick auf Zahlen und ihren Zusammenhang und wir wissen, wie die Zahlangaben zu verstehen sind. Die Fähigkeit, Zahlaspekte zu differenzieren, ist wie selbstverständlich in den Alltag eingebaut und wird von uns zumeist automatisiert durchgeführt. Wir müssen uns kaum noch Gedanken darüber machen. Deshalb wollen wir in diesem Artikel für gewichtige Zahlbedeutungen (Zahlaspekte) sensibilisieren, die Kinder erst noch zu unterscheiden lernen müssen, um Zahlen nicht nur als ein Nacheinander in der Zahlwortreihe zu denken, sondern auch als eine Zusammensetzung aus anderen Zahlen. Die nachfolgende begriffliche Klärung soll zu einer Entlastung für all diejenigen beitragen, die eine tragende Rolle beim Übergang vom vorschulischen zum schulischen Lernen haben, für die Erzieher/innen, Lehrkräfte und ggf. auch für Eltern.

Inhalt

Wir beziehen uns nachfolgend auf drei Zahlaspekte:

- Zahlen als Nominalzahlen
  (Zahlen des Namens, Codierungszahlen)
- Zahlen als Ordinalzahlen
  (Zahlen der Ordnung)
- Zahlen als Kardinalzahlen
  (Zahlen der Menge)

1.1 Zahlen zur eindeutigen Bezeichnung von Objekten – Nominalzahlen

Kinder wie Erwachsene kommen mit Zahlen in Berührung, wenn sie bspw. im Schwimmbad ihren Schrankschüssel erhalten, wissen wollen, in welchen Bus sie einsteigen müssen, Zahlen auf Autokennzeichen entdecken, Telefonnummern wählen, beim Sport ein Trikot mit einer bestimmten Nummer anziehen, Losnummern mit der Gewinnziehung abgleichen usw.

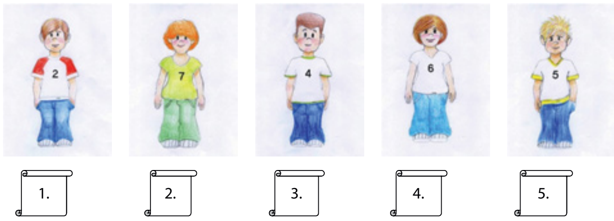
Zahlen, die für diese Zwecke eingesetzt sind, sind Codierungen. Die Ziffernfolge orientiert sich nicht notwendigerweise an einer Reihenfolge wie der Zahlwortfolge. Mit diesen Zahlen lässt sich weder sinnvoll rechnen noch eine Ordnung nach der Anzahl herstellen. Ihre Funktion ist die der Bezeichnung/der Benamsung.

Fünf Kinder stehen in einer Reihe nebeneinander. Auf ihren T-Shirts ist jeweils eine Zahl aufgedruckt. Diese Zahlen werden verwendet zum Kennzeichnen und zum Unterscheiden von Dingen bzw. Personen. Sie haben in diesem Sinne die gleiche Bedeutung wie Namen.

Es fehlen diesen Zahlen zentrale Eigenschaften, wie sie den kardinalen Zahlen innewohnen, mit denen wir uns in der Arithmetik befassen. Streng genommen kann man sagen, sie stehen mit diesen Zahlen nicht in Beziehung, auch wenn für sie die gleichen, nämlich die arabischen Ziffern, benutzt werden. Codierungszahlen gehören daher nicht zu dem umfassenden Zahlbegriff, den Kinder entwickeln müssen, um in der Welt der Zahlen aus mathematischer Sicht heraus zurecht zu kommen. Wichtig ist, sich diesen Zahlaspekt bewusst zu machen, um ihn von den anderen abgrenzen zu können, da wir ihn in der Lebenswelt immer wieder antreffen.

1.2 Zahlen zur Festlegung von Hierarchien – Ordinalzahlen

Zahlen können auch den Platz innerhalb einer Abfolge angeben, wie die Reihenfolge entlang der Ordnung der Zahlen innerhalb des Zählprozesses, eine Warteplatznummer beim Stadtamt oder an der Käsetheke, die Lieblingsseite in einem Bilderbuch, das Datum oder die Siegerplätze nach einem Wettbewerb. Die Reihenfolge dieser Zahlen obliegt einem Vergleichskriterium, das die Ordnung festlegt wie bspw.: „An welcher Stelle?“ oder: „Der wievielte?“

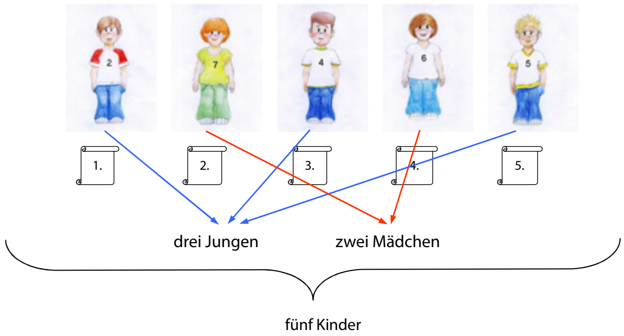


In der Ziffernschreibweise werden diese Zahlen mit einem abschließenden Punkt (3.) versehen und sie werden anders gesprochen, dritte(r) statt drei. Wird der Hinweis auf die Position innerhalb einer Reihung als Nummer angegeben, so schreibt sich dies verkürzt als „3“, beispielsweise Warteplatznummern und Buchseiten.

In ihrer Funktion als Zahlen der Ordnung/Reihenfolge sind diese Zahlen weder für das Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren noch für das Dividieren geeignet. Ein dritter Platz aus dem Laufwettbewerb und ein zweiter Platz aus dem gleichen Wettbewerb ergeben zusammen nicht den fünften Platz. Ebenso wenig ist das Subtrahieren eines zweiten Platzes vom dritten Platz eine Möglichkeit, auf den ersten Platz zu gelangen. Und keinesfalls fasst das Addieren von Seite 4 und Seite 5 neun Buchseiten zusammen. Ordinalzahlen brauchen wir, um die Position eines Elements in einer Reihenfolge anzugeben.

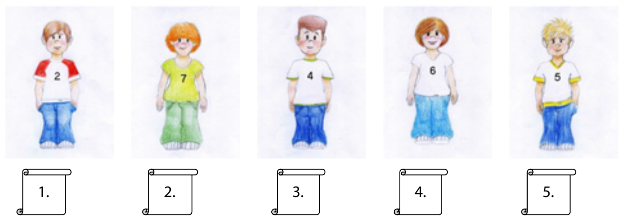
1.3 Zahlen zur Kennzeichnung von Anzahlen – Kardinalzahlen

Die „Rechen“-Zahlen geben die Anzahl der Elemente einer Menge an, die sich unter einem gemeinsamen Oberbegriff (einer Klasse) zusammenfassen lässt, wie bspw. drei Äpfel, vier Menschen und zwei Badehosen oder dreimal über das Seil springen. Diese Zahlen beschreiben die Mächtigkeit (die Kardinalität) einer Menge. Ihnen liegt die Einheit eins zu Grunde. Die Gemeinsamkeit dieser Zahlen besteht im Ausdrücken der Vielfachen von eins. Ihre Besonderheit ist das jeweilige Vielfache von eins. Jede Kardinalzahl beschreibt eine bestimmte und daher von anderen Kardinalzahlen unterscheidbare Anzahl.



Ein Mädchen plus *ein* Mädchen sind *zusammen zwei* Mädchen, *ein* Junge plus *ein* Junge plus *ein* Junge sind *zusammen drei* Jungen. *Drei* Jungen plus *zwei* Mädchen sind *zusammen fünf* Kinder.

Nominalzahlen wie Ordinalzahlen beinhalteten nur indirekt die Eigenschaft die den „Rechen"-Zahlen zugrunde liegt. Sie repräsentieren jeweils die Anzahl eins, ein Element einer Menge. *Nur* unter dem kardinalen Gesichtspunkt lassen sie sich „berechnen". Wenn man es genau nimmt, wird für diesen Zweck ein Wechsel in der Zahlbedeutung vorgenommen:



Die Kinder mit den Nummern 4, 5 und 7 ergeben zusammen drei Kinder. Wir wenden den nominellen Zahlaspekt auf eine Gemeinsamkeit, eine Klasse an und berechnen die Anzahl der Kinder. Betrachtet werden die Vielfachen der Einheit „ein Kind". Nicht anders verhält es sich, wenn wir die Frage stellen: „Der Erste, der Zweite und der Dritte sind wie viele Kinder zusammen?" Auch hier hält die Antwort das Zusammenfassen von dreimal einem Kind fest: „Es sind drei Kinder."

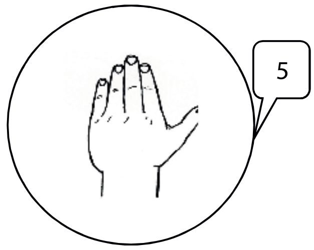
2. Wofür sind diese Grundlagen in der Zahlbegriffsbildung wichtig?

Den richtigen Blick für Zahlen zu entwickeln, ist eine wesentliche Lernvoraussetzung, um sich im Eingangsunterricht vom abzählenden Rechnen zu lösen und nicht-abzählende Lösungsstrategien entwickeln zu können. Zu wissen, dass sich die Zahlen mit denen wir rechnen, aus anderen, kleineren Anzahlen zusammensetzen und gleichzeitig Teile größerer Anzahlen sind, ist das Fundament, um diesen Schritt zu vollziehen. Dieses Teile-Ganzes-Verständnis müssen Erstklässler lernen, auf die Zahlzerlegung und auf die Rechenoperationen anzuwenden.

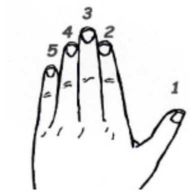
Ein Blick in die Schulbücher zeigt, dass es vom ersten Schultag an um Zahlen geht und nach kurzer Einführung auch ums Rechnen, um das Operieren mit Anzahlen. All dieses geschieht oft, ohne sich zu vergewissern, ob bei allen Erstklässlern die Grundlagen für das Begreifen von Anzahlen vorliegen.

2.1 Fünf gleich Fünfter?

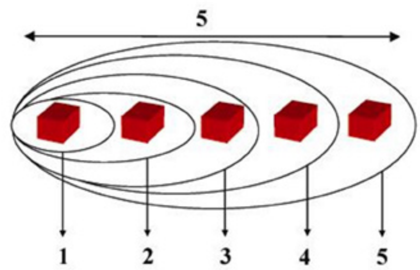
Für viele Kinder wird dieses Vorgehen nicht zum Problem. Sie verfügen bereits vor Schulbeginn über wichtige Grundlagen der Zahlvorstellung als Basis für das Rechnen, ein rechnerisches Vorwissen. Für sie gibt beim Auszählen der Elemente einer Menge die letztgenannte Zahl die Größe der Gesamtanzahl an, welche alle kleineren Anzahlen enthält. An diese Einsichten können sie im Unterricht anknüpfen.



Einen solchen mathematischen Entwicklungsstand haben jedoch nicht alle Kinder zum Schulbeginn erreicht. Einige Erstklässler sind in ihrem Denken über Zahlen noch nicht so weit, wie es der Lehrplan erfordert. Die Zahlwortreihe verstehen sie als „Zahlenalphabet". Sie ordnen jedem Gegenstand einen Zahlnamen zu und das zuletzt angetippte Objekt wird als Einzelobjekt verstanden. Manche von ihnen denken, fünf sei der kleine Finger ihrer Hand oder das fünfte Plättchen auf dem Tisch. Sie haben eine eingeschränkte Sicht auf Zahlen, die vorrangig von dem Reihenfolge-Gedanken (Ordinalzahl-Aspekt) geprägt ist.



Einmal anders ausgedrückt: Zählen ist nicht gleich Zählen! Entscheidend ist das Anzahlverständnis, das den Zählvorgang begleitet. Kennt ein Kind den Unterschied zwischen dem fünften Plättchen und fünf Plättchen? Weiß es, dass eine Anzahl solange „gleich viele" bleibt, wie kein Plättchen dazu gelegt bzw. keines weggenommen wird? Versteht es, dass die Anordnung der Objekte dabei ohne Bedeutung ist? Erkennt es, dass „ein Plättchen dazu" bedeutet, es sind jetzt sechs Plättchen, ohne die Menge neu auszählen zu müssen? Denkt es beim Weiterzählen die Nachfolgezahl als ein Vermehren der Anzahl um eins zur vorausgehenden Zahl?



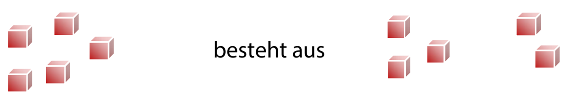
Dieses Verständnis ist ein grundlegender Ausgangspunkt für den Einstieg in das Rechnen. Erst das Verständnis von Zahlen als Bezug auf die Vielfachen der Einheit eins macht Zahlen vergleichbar, zerlegbar und zusammenfügbar.

Ein sicheres Zahlwissen zu Schulbeginn führt allerdings nicht automatisch zu einer Einsicht in Zahlzusammenhänge und Anzahloperationen. Der Unterricht in der ersten Klasse muss diesen Übergang erst noch leisten. Umgekehrt ist jedoch davon auszugehen, dass Kindern mit einem unzureichenden Zahlwissen das Erkennen numerischer Zusammenhänge deutlich erschwert ist, einigen gelingt der Einstieg ins Rechnen gar nicht. Allgemein kann man sagen: Über ein Anzahlverständnis verfügen heißt, das Fundament und damit die Anknüpfungspunkte für den Mathematikunterricht mitzubringen.

2.2 Anzahlwissen ist Basiswissen für das Rechnenlernen

Zahlen als Zusammensetzung von Anzahlen, als Kardinalzahlen zu verstehen, ermöglicht es Erstklässlern, fünf nicht nur als „Zahlwort, das nach vier und vor sechs kommt" zu denken, sondern auch als „5=1+1+1+1+1, 5=4+1 und 5=6−1". Auf dieser Einsicht basiert das Teile-Ganzes-Verständnis von Zahlen und Rechenoperationen.[1]

Dieses zentrale Konzept der Mathematik ist das Fundament, um Anzahlstrukturierungen, wie die Zahlzerlegungen, zu begreifen und diese für das Automatisieren des kleinen Einspluseins und Einsminuseins einzusetzen. Kopfrechnen setzt voraus, die Addition als das Zusammenführen von Teilmengen zu einer Gesamtmenge und die Subtraktion als Umkehrung, als Herauslösen einer Teilmenge aus der Gesamtmenge, zu erfassen. Aufbauend auf der Mengenstruktur einer Zahlzerlegung, wie beispielsweise „fünf besteht aus drei und zwei", sind vier Rechenoperationen abzuleiten: zwei Additionen und zwei Subtraktionen. In einem weiteren Schritt können hieraus die zugehörigen Platzhalteraufgaben begründet werden.



$2 + 3 = 5 \longrightarrow \square + 3 = 5$ und $2 + \square = 5$

$3 + 2 = 5 \longrightarrow \square + 2 = 5$ und $3 + \square = 5$

$5 - 3 = 2 \longrightarrow 5 - \square = 2$ und $\square - 3 = 2$

$5 - 2 = 3 \longrightarrow 5 - \square = 3$ und $\square - 2 = 3$

1 Zur Vertiefung dieser Thematik verweisen wir auf einen Artikel von Christian Bussebaum „Hürden beim Erlernen des Rechnens abbauen. Aber wie? Probleme und praktische Anregungen"; KuZ-Ausgabe 38

Gezielte Förderung setzt die Kenntnis vom Wissensstand des Kindes und vom richtigen Einsatz des Fördermaterials voraus

Das Vorschulalter ist für die Früherkennung von Risikofaktoren für mathematische Lernprobleme ein wichtiger Zeitabschnitt. Schon im Kindergarten bzw. in der Vorschule sollten Lehrer, Erzieher, Kinderärzte und Eltern auf Anzeichen fehlender Grundfertigkeiten achten und Kinder darin unterstützen, dass sie eine tragfähige Vorstellung vom Sinngehalt einer (An-)Zahl entwickeln. So weist beispielsweise der Orientierungsplan für Bildung und Erziehung des Landes Niedersachsen daraufhin: In „der Kindertagesstätte kommt es nicht darauf an, dass die Kinder möglichst rasch zählen und komplexe geometrische Formen kennen lernen. Vielmehr ist es für das mathematische Grundverständnis wichtig, dass die Mädchen und Jungen in unterschiedlichen Situationen im Alltag und im Spiel angeregt werden, Mengen zu erfassen und zu vergleichen sowie Raum-Lage-Beziehungen zu erkennen und zu bezeichnen. Begriffe wie mehr – weniger, oben – unten, groß – klein, hoch, höchster Punkt, Ecke – Mitte etc. sollten zur Artikulation der kindlichen Erfahrungen und Beobachtungen eingeführt und gefestigt werden. Dabei wird mit zunehmendem Alter der Kinder auch das Zählen angebahnt und durch Spiele oder Abzählreime eingeübt."[2]

Im Artikel „Unsinn im Zahlenland" führt Dr. Mathias Leder (KuZ-Ausgabe 23) dazu aus:

> „Wissenschaftliche Studien zum Erwerb früher mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten zeigen, dass
>
> (1) das mathematische Wissen, mit dem ein Kind eingeschult wird, einen hohen Vorhersagewert hat für seinen Schulerfolg im mathematischen Anfangsunterricht,
>
> (2) die Kinder sich in der Menge und Qualität ihres Vorwissens erheblich unterscheiden,
>
> (3) sich diese Unterschiede zwischen den Kindern keineswegs von selbst ausgleichen (vgl. Stern 2003, Krajewski 2008a, b, c, Gasteiger 2010, Weinhold Zulauf et al. 2003)."

Die Phase des Übergangs vom Kindergarten in die Schule ist eine wichtige Schrittstelle, um möglichst gute Lernchancen auch im Fach Mathematik vorzufinden, denn bereits wenige Wochen nach Schulbeginn sind rechenoperative Bezüge Themen im

2 Niedersächsisches Kultusministerium, Orientierungsplan für Bildung und Erziehung, II. Bildungsziele in Lernbereichen und Erfahrungsfeldern, 6. Mathematisches Grundverständnis, S.24, Hannover August 2023; siehe auch: https://bildungsportal-niedersachsen.de/fruehkindliche-bildung/bildungsauftrag/ orientierungsplan; aufgerufen am 17.11.2024).

Unterricht. Die erforderlichen Lernprozesse können wir Erwachsene unterstützen, aber durchaus auch erschweren – je nachdem, welche Art von Förderung wir Kindern geben. Die Erfahrung auf unseren Fortbildungen hat uns gezeigt, dass viele Erzieher/Erzieherinnen und Lehrkräfte sich überfordert fühlen, wenn es darum geht, Kinder dabei zu unterstützen, Mengen und Zahlbeziehungen wahrzunehmen und richtig sprachlich zu erfassen.

Zur Verunsicherung trägt sicherlich auch bei, dass auf dem Buchmarkt mehr und weniger gut geeignete mathematische Frühförderkonzepte zu finden sind. Es gibt zwar nicht den Königsweg für die Vermittlung des mathematischen Denkens, aber es herrscht mittlerweile Konsens darüber, dass auf dem Materialmarkt einiges angeboten wird, das einen Irrweg darstellt. Wir möchten Ihnen in diesem Zusammenhang den Artikel von Dr. M. Leder „Unsinn im Zahlenland“ ans Herz legen (KuZ-Ausgabe 23, Seite 6 ff).

Im Sinne einer Prävention von Dispositionen mathematischer Lernprobleme hat der Arbeitskreis des Zentrums für angewandte Lernforschung ein Screening zur Lernstandserhebung Arithmetik – Vorschule und sowie Anregungen für verständnisfördernde Übungen zusammengestellt. Dieses Förderprogramm wurde für 5 bis 6-jährige Kinder entwickelt, die noch nicht zur Schule gehen. Da häufig auch Grundschulkinder in den im Screening festgehaltenen Segmenten einen Förderbedarf haben, ist das Förderprogramm ebenfalls für den Einsatz in der Schule geeignet. Fortbildungen zum Thema „Frühe mathematische Bildung in der Kita. bzw. Vorschule“ finden Sie unter www.arbeitskreis-lernforschung.de/fortbildungen

Abschließend zwei Anregungen, wie Sie einen Anhaltspunkt über das Anzahlverständnis eines Kindes gewinnen können:

Folgende kurze Rechengeschichte lässt sich auf der anschaulichen Ebene, als Zeichnung oder mithilfe von Material sowie auf der abstrakten Ebene, mittels Rechenoperation, lösen. Die Anforderung an den Lösungsweg kann daher der Lernsituation angepasst werden: „Am Strand stehen fünf Sonnenschirme. Den zweiten und den dritten Sonnenschirm weht der Wind weg. Wie viele Sonnenschirme bleiben stehen?“

Die nächste Rechengeschichte beinhaltet alle drei Zahlbegriffe im umgangssprachlichen Sinne und ermöglicht das Herausfinden der Lösung durch einen gedanklichen Wechsel der Zahlbedeutung von den Nominalzahlen oder von den Ordinalzahlen hin zu den Kardinalzahlen: „Zehn Kinder nehmen am Laufwettbewerb teil. Jedes Kind trägt ein Trikot mit einer Nummer. Die Nummer 3 kommt als 1. ins Ziel. Die Nummer 5 schafft den 2. Platz und die Nummer 2 den 3. Platz. Alle anderen Kinder laufen nicht als Sieger ins Ziel. Wie viele Kinder stehen auf dem Siegerpodest?“

„Teilen durch null, das darf man nicht!“ [1] „Wer hat das verboten?“

Nils Leder, Katja Rochmann
Osnabrücker Zentrum für mathematisches Lernen

Im Alltag kommt „Null“ häufig zur Anwendung. Beispielsweise im Sprachgebrauch als Motivationsbeschreibung: „Null Bock“, als Angabe der Reaktionszeit: „Im null Komma nichts“ bzw. „Von null auf hundert“ oder als Synonym für „keine/nichts“. Ebenfalls wissen Kinder früh, dass am 31.12. jeden Jahres um „Null Uhr“ ein neues Jahr beginnt und es bei „Null Grad“ sehr kalt ist.

Beim Rechnen hingegen stellt die Zahl Null nicht nur für Grundschüler immer wieder eine Herausforderung dar. Dies gilt insbesondere für die Punktrechnungen. Während bei der Multiplikation Schüler – auch jene Schüler ohne fundiertes mathematisches Verständnis – oftmals der Zugriff auf das Ergebnis von $a \cdot 0$ bzw. $0 \cdot a$ gelingt, bereitet nicht wenigen Schülern das Lösen von Divisionen mit der Zahl Null im Term große Schwierigkeiten. Etliche Schüler denken die Zahl Null lediglich als „Nichts“. Sie haben keine Einsicht ausgebildet, dass null eine Rechenzahl ist – die kleinste kardinale Zahl: Null steht für die Anzahl der Elemente einer leeren Menge und kann sowohl als Operand als auch als Ergebnis – Wert des Terms – auftreten.

Diese Schüler haben beispielsweise den Merksatz verinnerlicht: „Beim Teilen mit 0 ist immer 0 das Ergebnis.“ Mit dieser „Rechenregel“ wird immer nur ein Teil der Aufgaben richtig, nämlich die, deren Dividend durch null dargestellt wird wie bei $0 : 851 = 0$. Divisionen, bei denen der Divisor die Zahl 0 repräsentiert, wird hingegen infolge des

[1] „..., da eine Division durch Null grundsätzlich verboten ist.“ Aus: https://de.wikipedia.org/wiki/Umkehroperation, aufgerufen am 09.12.24

verinnerlichten Merksatzes ein falscher Wert des Quotienten zugeordnet: 851 : 0 = 0.

Gelegentlich haben Schüler sich für Geteiltaufgaben, die die Zahl 0 beinhalten, gemerkt: „Das geht nicht!“, ohne ein Kriterium dafür zu kennen. Die Anwendung dieser „Rechenregel“ zeigt ein inverses Fehlerbild zum erstgenannten Beispiel. Aufgaben, bei denen der Divisor den Wert 0 repräsentiert, werden mit dieser Merkregel richtig gelöst: „851 : 0 geht nicht.“ Hingegen 0 : 851 wird mit „geht nicht“ falsch beantwortet.

Ebenso erleben wir in unseren lerntherapeutischen Diagnostiken Kinder, die für das Bewältigen von Divisionen folgende Vorgehensweise präsent haben: „Beim Teilen mit 0 bleibt es wie vorher!“ Sie behandeln die Zahl 0 im Sinne des neutralen Elements der Addition und differenzieren nicht sachgerecht zwischen Summanden und den Operanden der Division.[2] Auch die unterschiedliche Bedeutung von Dividenden und Divisor findet keine Berücksichtigung. Auf dieser fehlerhaften Grundlage werden sowohl 851 : 0 = 851 als auch 0 : 851 = 851 fehlerhaft gelöst.

Können diese Grundschüler zudem den Zusammenhang zwischen Multiplikation und Division nicht zur Rechenkontrolle nutzen, ist ihnen auch die Proberechnung und damit die Unmöglichkeit des ermittelten Werts des Quotienten von bspw. „851“ nicht ersichtlich. Die Proberechnungen würden folgende falschen mathematischen Aussagen beinhalten: 851 · 0 = 851 und 0 · 851 = 851.

Allen aufgeführten Fehlertypen ist gemeinsam, dass unverstandene Technik bzw. rein schematisch antrainiertes Regelwissen das logische Verständnis der Mathematik ersetzt. Fehlt jedoch das Fundament, dann ergeben sich zwangsläufig Fehler bei Aufgaben, die eine Kenntnis der Rechenoperationen und deren Zusammenhänge voraussetzen.

Wie ist das eigentlich mit „Null durch eine Zahl teilen“ und „Eine Zahl durch null teilen“?

Vergegenwärtigen wir uns zunächst folgende Einmaleins-Aufgaben und die zugehörigen Plusaufgaben:

4 · 2 = 8	2 + 2 + 2 +2 = 8
4 · 1 = 4	1 + 1 + 1 + 1 = 4
4 · 0 = 0	0 + 0 + 0 + 0 = 0

Da bei der **Multiplikation** das Kommutativgesetz gilt, wissen wir, dass „4 · 0 = 0 · 4“. Ganz allgemein gesagt, bedeutet dies für alle Einmaleins-Reihen: Ein Produkt, bei dem einer der Faktoren null ist, ergibt stets einen Produktwert von null. Die Zahl Null wird als das absorbierende Element der Multiplikation bezeichnet – während die Zahl Eins das neutrale Element ist.[3]

Nun wissen wir, dass allgemein gilt: „Die Division ist eng verknüpft mit der Multiplikation, da die Division die Umkehrung der Multiplikation ist (Wittmann & Müller, 2017, S. 238). Die Aufgaben des kleinen Einsdurcheins umfassen somit die Umkehraufgaben des kleinen Einmaleins.“[4] Exemplarisch aufgezeigt für 4 · 2 = 8 wäre das ? = 8 : 2 bzw. 8 : 2 = ?. Doch gibt es uneingeschränkt zu jeder Multiplikation eine entsprechende Geteilt-Rechnung als Umkehraufgabe? Konkreter gefragt: Lässt sich das Resultat einer Multiplikation mit null im Term mittels Division wieder umkehren?

Bei der **Division** mit null sind zwei Fälle zu unterscheiden, da das Kommutativgesetz bei dieser Rechenart keine Gültigkeit hat:

Fall a) Der Dividend (das zu Teilende) ist 0.

0 : 4 = ? In diesem Fall ist null das absorbierende Element, denn 0 : 4 = 0

Nun lässt sich auf der abstrakten Ebene nicht unterscheiden, ob bei der Geteiltaufgabe 0 : 4 die Zahl 4 die „Portionsgröße“ (die Größe einer Teilmenge ist vorgegeben, Vorstellung des Aufteilens) oder die „Wie-oft-Zahl“ (die Anzahl der Teilmengen vorgegeben, Vorstellung des Verteilens) angibt. Mithilfe beider Grundvorstellungen lässt sich 0 : 4 = 0 herleiten.

Aufteilen: Wie oft ist vier in null enthalten? Anschaulich gefragt entspricht dies der Überlegung „Wie oft kannst du von 0 Keksen immer 4 Kekse wegnehmen?“ Antwort: „Null mal.“

Verteilen: Ich teile null in vier Teile. Wie groß sind die Portionen? Anschaulich gefragt entspricht dies der Überlegung „Du verteilst 0 Kekse gerecht auf 4 Teller. Wie viele Kekse sind dann auf jedem Teller?“ Antwort: „Null Kekse.“

Die Proberechnung mit der Umkehrung bestätigt dieses Ergebnis: 0 · 4 = ? → 0 · 4 = 0

Für die Probe kann auch eine offene Fragestellung herangezogen werden: „Welche Zahl mit 4 multipliziert ergibt eine Gesamtmenge von 0?“ Antwort: „Die Zahl 0 multipliziert mit 4 ergibt 0.“ Die Frage kann eindeutig beantwortet werden.

[2] Das „Neutrale Element“ kennzeichnet in der Mathematik ein Element, das alle anderen Elemente einer Rechenoperation unverändert lässt.

[3] Siehe auch „3 mal 2 das ergibt 5“, in KuZ 32. Ausgabe v. 2020, Seite 9 ff.

[4] https://mahiko.dzlm.de/2-schuljahr-–-überblick/sicher-im-1-durch-1/grundlagen, aufgerufen am 05.01.2025

Diese Fragestellung können wir für jeden Multiplikanden durchspielen, wir erhalten immer die gleiche Antwort: „Die Zahl Null ergibt mit jeder Anzahl multipliziert das Ergebnis null.“ Daraus folgt: Null ist durch jede Zahl (a) teilbar, denn „$0 = 0 \cdot a$ und $0 : a = 0$“. In diesem Fall können Division und Multiplikation miteinander verknüpft werden: Multiplikationen, bei denen der Multiplikator null ist bzw. Divisionen mit einem Dividenden von null, verhalten sich als Umkehroperationen zueinander.

Doch bereits hier gibt es eine Ausnahme, denn nur eine Division von *null durch eine von null verschiedene Zahl* ermöglicht eine Umkehrung mittels einer Malaufgabe. Anders verhält es sich bei $0 : 0 = 0$. Dies verdeutlicht ein Rückgriff auf die Fragestellung: „Welche Zahl mit 0 multipliziert ergibt 0?“ Antwort: „Jede beliebige Anzahl bringt das Ergebnis von null!“ Eine Proberechnung mittels Umkehroperation führt in diesem Fall zu keiner eindeutigen mathematischen Aussage.

Fall b) Der Divisor (der Teiler) ist null.

$4 : 0 = ?$ Oftmals werden spontan „4“ oder „0“ als Resultat genannt.

Machen wir die Proberechnung mit der Umkehrung: $4 \cdot 0 \neq 4$ und $0 \cdot 0 \neq 4$

Für die Probe kann auch hier eine offene Fragestellung herangezogen werden: „Welche Zahl mit 0 multipliziert ergibt eine Gesamtmenge von 4?“ Antwort: „Keine Zahl mit 0 multipliziert ergibt 4.“ Denn: Jede Multiplikation mit null ergibt wieder null (siehe oben). Die Frage nach der gesuchten Zahl kann daher nicht beantwortet werden. Diese Division ist nicht lösbar. Für die Division $4 : 0$ gilt: Der Wert des Quotienten kann nicht definiert werden. Überprüfen wir diese Aussage abschließend mit den beiden Grundvorstellungen von der Division.

Aufteilen: Wie oft ist null in vier enthalten? Anschaulich gefragt entspricht dies der Überlegung „Wie oft kannst du von 4 Keksen immer 0 Kekse wegnehmen?“ Antwort: „Dies lässt sich mit keiner Anzahl von Operationen beantworten.“ Die Frage kann gut mit einer subtraktiven Handlung begleitet werden: $4 - 0 - 0 - 0 - 0 \ldots$ Fazit: Die Gesamtmenge von vier wird nicht weniger, ich komme zu keiner Lösungszahl.

Verteilen: Ich teile vier in null Teile. Anschaulich gefragt entspricht dies der Überlegung „Du verteilst 4 Kekse gerecht auf 0 Teller.“ Diese Aufforderung macht keinen Sinn, denn es findet gar keine Verteilung statt.

Resümee: Während im Fall a) die Anzahl der möglichen Operationen eindeutig mit „0“ beantwortet werden kann, ist im Fall b) der Quotientenwert als Ergebnis der Division undefinierbar.

Beide Fälle bereiten Grundschülern Probleme. Bei nicht wenigen Kindern sind diese Schwierigkeiten bei der Division auch beim Wechsel auf die weiterführende Schule noch vorhanden. Das Verbot „Teilen durch null, das darf man nicht!“ ist kein hilfreicher Merksatz. Vielmehr suggeriert er, dass das Teilen durch null – unser Fall b) – ein feststehendes Gebot ist, das mathematisch weder herleitbar noch erklärbar ist, schon gar nicht mit dem Wissen eines Grundschülers: „Frag bloß nicht wieso, weshalb, warum!“

Um die oben ausgeführten Erklärung nachzuvollziehen zu können, ist es wichtig, dass die Schüler den Unterschied zwischen den beiden Aufgabenstellungen begreifen ($0 : 4$ bzw. $4 : 0$) und die Division nicht nur als Umkehrung der Multiplikation verinnerlichen[5], im Sinne von „Wenn du das Einmaleins kannst, kannst du auch die Geteiltaufgaben.“ Dafür muss bei der Vermittlung der Division auf eine klare Unterscheidung von Dividenden und Divisor Wert legt werden. Ebenso muss verstanden sein, dass beim Teilen die Ausgangsmenge (der Dividend) gebündelt wird. Im Idealfall so, dass die Ausgangsmenge vollständig aufgebraucht ist. Das Bündeln geschieht, je nachdem welche Fragestellung beantwortet werden soll, als Aufteilen oder als Verteilen.

[5] Siehe auch KuZ 1.Sonderheft zum Thema Division, Herbst 2022

Verein für Lerntherapie und Dyskalkulie e.V.

Internet:
www.dyskalkulie.de
E-Mail:
verein@dyskalkulie.de

Impressum:
Herausgeber: Verein für Lern- und Dyskalkulietherapie, München, Brienner Straße 48
Redaktion: Alexander v. Schwerin (verantwortlich),
Beate Lampke, München
Hans-Joachim Lukow, Osnabrück
Christian Bussebaum, Düsseldorf
Endkorrektur: Martina Schneider, Köln
Layout und Satz: Schmidt Media Design, München